Wolfgang Strößner

Zur Spektralgeometrie algebraischer Kurven

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt–Universität zu Berlin

1. Referent:	Prof. Dr. J. Brüning
2. Referent:	PD Dr. M. Lesch
3. Referent:	Prof. Dr. B.–W. Schulze
Tag der Promotion:	15. September 1998

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Motiviert durch die algebraischen Kurven betrachten wir auf zusammenhängenden kompakten Riemannschen Flächen eine Klasse degenerierter Metriken mit endlich vielen kegelartigen Singularitäten. Wie im nichtsingulären Fall kann die ζ–regularisierte Determinante $\det \Delta$ des Laplaceoperators basierend auf der ζ–Funktion definiert werden.

Die Polyakov–Formel, die die Variation von $\det \Delta$ unter konformer Variation der zugrundeliegenden Metrik angibt, kann auf die von uns betrachtete Klasse singulärer Metriken übertragen werden.

Für eine gewisse Teilklasse von Metriken geben wir einen Uniformisierungssatz an, der besagt, daß jede dieser Metriken konform äquivalent zu einer Metrik konstanter Krümmung ist. Für andere Metriken der betrachteten Klasse ist eine solche Aussage im allgemeinen nicht möglich. Es wird ein Gegenbeispiel angegeben.

Wir zeigen, daß Metriken der oben erwähnten Teilklasse nach der Uniformisierung in der Nähe von Singularitäten ein Warped Product sind. Eine Konsequenz daraus ist, daß geodätische Kreise um eine Singularität glatt sind.

Einleitung

Auf einer zusammenhängenden kompakten Riemannschen Fläche S mit glatter Riemannscher Metrik g kann man die ζ–Funktion des Laplaceoperators Δ für $\operatorname{Re} s > 1$ durch

$$\zeta(s) := \sum_{j \geq 1} \lambda_j^{-s}$$

definieren, wobei

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

die Eigenwerte des Laplaceoperators auf Funktionen Δ bezeichnen. ζ kann meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden und ist bei 0 regulär. Die ζ–regularisierte Determinante des Laplaceoperators wird durch

$$\det \Delta := e^{-\zeta'(0)}$$

definiert ([OPS], Abschnitt 1). $\det \Delta$ stellt eine wichtige Invariante des Spektrums von Δ dar.

Die Polyakov–Formel gibt die Variation von $\det \Delta$ unter konformer Variation von g an. Sei $\varphi \in C^\infty(S)$ und

$$g_\varphi := e^{2\varphi} g$$

die durch $e^{2\varphi}$ induzierte Metrik auf S. Der zugehörige Laplaceoperator wird mit Δ_φ bezeichnet. Dann gilt

$$\begin{aligned} \log \det \Delta_\varphi = &-\frac{1}{12\pi} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{6\pi}(K, \varphi) + 2 \log \|e^\varphi\|_{L^2} \\ &+ \log \det \Delta - \log \operatorname{vol} S. \end{aligned}$$

K steht für die Krümmung. Alle metrikabhängigen Ausdrücke sind bezüglich g zu verstehen ([P1], [P2], [OPS], Abschnitt 1).

Es ist interessant zu untersuchen, ob es für singuläre Metriken auf S ein Analogon zur Polyakov–Formel gibt. Motiviert durch die Klasse der algebraischen Kurven betrachten wir Metriken mit endlich vielen kegelartigen Singularitäten der folgenden Gestalt.

Sei $\Sigma \subset S$ eine endliche Teilmenge, $\mathring{S} := S \setminus \Sigma$. g sei ein glatter 2–Tensor auf S mit folgenden Eigenschaften:

- $g \Big|_{\overset{\circ}{S}}$ ist eine glatte Riemannsche Metrik.
- Zu jedem $p \in \Sigma$ gibt es eine offene Umgebung $U_p \subset S$, für die
$$U_p \cap \Sigma = \{p\}$$
und
$$U_p \setminus \{p\} \simeq D_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < \varepsilon\}$$
gilt.
- Auf U_p gilt
$$g = h\left(dx^2 + dy^2\right)$$
mit
$$\begin{aligned} &h \in C^\infty\left(D_\varepsilon \cup \{0\}\right), \\ &h\left(z, \overline{z}\right) = N\left(p\right)^2 |z|^{2N(p)-2} + O\left(|z|^{2N(p)-1}\right). \end{aligned}$$

$N(p) \in \mathbb{N}$ heißt die Multiplizität von p. Σ heißt der singuläre Ort von (S, g). Die Klasse aller solcher Metriken auf S bezeichnen wir mit $\mathcal{G}(S)$ (Definition 1.2.1).

Sei $M \subset \mathbb{C}P^n$ eine algebraische Kurve. τ sei die von einer hermiteschen Metrik auf $\mathbb{C}P^n$ induzierte Metrik auf M.
$$\psi : \widetilde{M} \to M$$
bezeichnet die Auflösung von M. Dann gilt
$$\widetilde{\tau} := \psi^* \tau \in \mathcal{G}\left(\widetilde{M}\right).$$
Auch sind alle glatten Metriken auf S in $\mathcal{G}(S)$ enthalten (Bemerkungen 1.2.5 und 1.2.2)

Für $g \in \mathcal{G}(S)$ definieren wir ζ wie im glatten Fall. Δ ist hier als die Friedrichsfortsetzung des Laplaceoperators zu verstehen. Gemäß [BL2], Formel (2.22) ist ζ wohldefiniert. Mit der in [BL2], Theorem 1.2 berechneten asymptotischen Entwicklung der Wärmeleitungsspur $\mathrm{tr}_{L^2} e^{-t\Delta}$ für $t \to 0+$ kann man zeigen, daß ζ bei 0 analytisch ist (Satz 2.2.1). Daher kann die ζ–regularisierte Determinante des Laplaceoperators $\det \Delta$ wie im glatten Fall definiert werden (Definition 2.2.3).

Für $\varphi \in C^\infty(S)$ definieren wir die Metrik g_φ wie im nichtsingulären Fall. Es gilt $g_\varphi \in \mathcal{G}(S)$ (Formel (2.3.1)).

Analog zu [BL2], Theorem 1.2 erhalten wir mit dem Singular Asymptotics Lemma von J. Brüning und R. Seeley ([BS1], S. 135) eine asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{L^2}\left(\varphi e^{-t\Delta}\right) \sim_{t\to 0+} & \sum_{j\geq 0} a_j(\varphi)\, t^{j-1} + \sum_{j\geq 2} b_j(\varphi)\, t^{j-1}\log t \\ & + \sum_{p\in\Sigma}\sum_{j\geq 0} c_j(\varphi)(p)\, t^{j/2N(p)},\end{aligned}$$

und es gilt

$$a_1(\varphi) + \sum_{p\in\Sigma} c_0(\varphi)(p) = \frac{1}{12\pi}(K,\varphi) - \frac{1}{12}\sum_{p\in\Sigma}\varphi(p)\left(N(p) - N(p)^{-1}\right).$$

(Formel (2.4.4) und Satz 2.4.5).

Der Grund für das Interesse an der Betrachtung von $\operatorname{tr}_{L^2}\left(\varphi e^{-t\Delta}\right)$ liegt darin, daß für $\varphi,\ \psi \in C^\infty(S)$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial\varphi}\log\det\Delta_\varphi(\psi) &= 2\cdot\ \text{konst. Term von}\ \operatorname{tr}_{L^2,\varphi}\left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi} - ⨍_\varphi\right)\right) \\ &= \frac{1}{6\pi}(K_\varphi,\psi)_\varphi - \frac{1}{6}\sum_{p\in\Sigma}\psi(p)\left(N(p) - N(p)^{-1}\right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\log\operatorname{vol}_\varphi S)(\psi)\end{aligned}$$

gilt (Satz 2.4.2). $⨍$ steht für den Mittelungsoperator. Der Index φ besagt, daß der jeweilige Ausdruck bezüglich der Metrik g_φ zu verstehen ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\log\det\Delta_\varphi = & -\frac{1}{12\pi}\|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{6\pi}(K,\varphi) + 2\log\|e^\varphi\|_{L^2} \\ & + \log\det\Delta - \log\operatorname{vol} S \\ & + \frac{1}{6}\sum_{p\in\Sigma}\varphi(p)\left(N(p) - N(p)^{-1}\right)\end{aligned}$$

(Theorem 2.4.6). Diese Formel unterscheidet sich von der Polyakov–Formel im regulären Fall nur durch den letzten Term, der lokal von einer Umgebung des singulären Ortes abhängt. Die Berechnung der Polyakov–Formel für die Klasse der degenerierten Metriken $\mathcal{G}(S)$ ist erheblich aufwendiger als im nichtsingulären Fall. Das ist hauptsächlich darauf zurückzuführen, daß durch die Existenz von Singularitäten die Spur des Wärmeleitungsoperators $e^{-t\Delta}$ eine wesentlich kompliziertere Gestalt aufweist (im Gegensatz zu regulären Flächen treten beispielsweise auch logarithmische Terme in der asymptotischen Entwicklung für $t \sim 0+$ auf) und Fragen der Integrierbarkeit nicht durch lokale Betrachtungen gelöst werden können, wie dies im kompakten nichtsingulären Fall möglich ist.

Falls der singuläre Ort leer ist, nimmt $\det \Delta_\varphi$ unter der Nebenbedingung

$$\operatorname{vol}_\varphi S \equiv const$$

ein eindeutig bestimmtes absolutes Maximum bei einem $\psi \in C^\infty(S)$ an. Die zu g_ψ gehörige Krümmung ist konstant ([OPS], Abschnitte 2.2 und 2.3).

Wir wollen untersuchen, ob eine entsprechende Uniformisierung für singuläre Metriken der Klasse $\mathcal{G}(S)$ existiert. Im allgemeinen ist $\det \Delta_\varphi$ unbeschränkt, so daß $g \in \mathcal{G}(S)$ nicht durch Maximierung von $\det \Delta_\varphi$ auf konstante Krümmung transformiert werden kann (Satz 3.1.18). Mit der Konstante

$$C_S(g) := \chi(S) + \sum_{p \in \Sigma} (N(p) - 1)$$

folgt aus [Tro1], Theorem 1(2), daß es im allgemeinen keine zu g konforme Metrik konstanter Krümmung gibt, falls $C_S(g) > 0$ (Abschnitt 3.3).

Wir betrachten den Fall $C_S(g) \leq 0$. Wir definieren ein Funktional

$$\begin{aligned} F : C^\infty(S) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \frac{1}{2} \|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 + (K, \varphi) - 2\pi C_S(g) \log \|e^\varphi\|_{L^2} \end{aligned}$$

(Abschnitt 3.1). F ist translationsinvariant (Satz 3.1.10). F ist konvex und $F\left|\ker \fint\right.$ ist strikt konvex (Satz 3.1.2).

$F\left|\ker \fint\right.$ nimmt bei einem eindeutig bestimmten $\psi \in C^\infty(S) \cap \ker \fint$ sein absolutes Minimum an. Die zugehörige Metrik g_ψ besitzt konstante Krümmung. ψ ist die einzige Funktion in $C^\infty(S) \cap \ker \fint$, die auf S eine Metrik konstanter Krümmung induziert (Theorem 3.1.12). Es gilt die Gauß–Bonnet Formel

$$\int_S K_\psi \, \mathrm{dvol}_\psi = 2\pi C_S(g)$$

(Satz 3.1.8).

Zum Beweis wählen wir eine Folge $(\varphi)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(S) \cap \ker \fint$, so daß $F(\varphi_n)$ monoton gegen

$$F_0 := \inf \left\{ F(\varphi) \;\middle|\; \varphi \in C^\infty(S) \cap \ker \fint \right\}$$

konvergiert. Es gibt eine Konstante C, so daß für jedes n

$$\|\varphi_n\|_{H^1} \leq C$$

gilt. Die Sobolev–Norm bezieht sich auf eine glatte, nach Koordinatenwechsel zu g und g_φ quasiisometrische Metrik σ auf S (Lemma 3.1.3).

Aus dem Einbettungssatz von Rellich folgt — gegebenenfalls nach Übergang zu einer Teilfolge —

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \psi \in H^1(S).$$

Es ist zu beachten, daß es sich bei der Konvergenz von φ_n lediglich um L^2–Konvergenz handelt.

F kann durch Stetigkeit zu

$$\widetilde{F} : H^1(S) \to \mathbb{R}$$

fortgesetzt werden, was unter der Nebenbedingung $⨍ \psi = 0$ bei ψ ein Minimum annimmt. Wegen der Konvexität von $\widetilde{F}$ handelt es sich um ein absolutes Minimum. $\widetilde{F}$ ist wie F translationsinvariant. Daher stellt ψ auch ohne die Nebenbedingung ein absolutes Minimum dar.

Daraus folgt, daß für $\vartheta \in C_0^\infty\left(\mathring{S}\right)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial\psi}\widetilde{F}(\vartheta)$$

gilt. Wir wissen $\psi \in H^1(S)$, woraus mit einem Ergebnis von J. L. Kazdan und F. W. Warner ([KW], S. 23, Formeln (3.6) und (3.7))

$$e^{2\psi} \in L^2(S)$$

folgt. Zusammen mit der Glattheit der Krümmung folgt

$$\Delta\psi = -K + \frac{2\pi C_S(g)}{\int_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}} e^{2\psi} \in L^2_{loc}\left(\mathring{S}\right).$$

Aus der Elliptizität des Laplaceoperators kann man $\psi \in C^\infty\left(\mathring{S}\right)$ folgern.

Es bleibt, die Glattheit von ψ in einer Umgebung U einer Singularität $p \in \Sigma$ zu zeigen. Wiederum unter Ausnutzung der Elliptizität des Laplaceoperators kann diese geschlossen werden.

Für die Krümmung gilt

$$K_\psi = e^{-2\psi}(K + \Delta\psi) \equiv \frac{2\pi C_S(g)}{\mathrm{vol}_\psi S}$$

(Formel (2.3.5)). Die Eindeutigkeit von ψ folgt aus der strikten Konvexität von $F\big|\ker ⨍$.

Für einen Spezialfall kann eine analoge Aussage mit schwächerer Regularität der uniformisierenden Funktion aus einer Arbeit von M. Troyanov ([Tro2]) gefolgert werden. Aus einer Arbeit von D. Hulin und M. Troyanov ([HT]) folgt eine analoge Aussage mit schwächerer Regularität der uniformisierenden Funktion für das von uns betrachtete Problem (Bemerkung 3.1.16),

Es stellt sich die Frage, wie die uniformisierte Metrik g_ψ in einer Umgebung von $p \in \Sigma$ aussieht. Sei $U \subset S$ eine hinreichend kleine Umgebung von p.

Falls $C_S(g) < 0$ gilt, gibt es eine Isometrie

$$\begin{aligned} i : (U \setminus \{p\}, g_\psi) \to \big(i\,(U \setminus \{p\}) \subset \mathbb{R}_+^* \times S^1, \\ g_{N(p)} := dx^2 + N(p)^2 (\sinh x)^2\, d\vartheta^2\big) \end{aligned}$$

(Theorem 3.2.2).

Um das zu sehen, zerlegen wir $U\setminus\{p\}$ in endlich viele keilförmige Flächen, deren Kanten Geodäten sind, die sich in p schneiden. Dabei treten mehrere technische Schwierigkeiten auf. Es muß untersucht werden, ob es solche Geodäten gibt (Korollar 3.2.11) und ob sie eindeutig sind (Satz 3.2.13). Schließlich muß man zeigen, daß es eine endliche Partition gibt, so daß der Öffnungswinkel jedes einzelnen Keils bei p spitz ist (Satz 3.2.14).

Wir betrachten nun einen solchen Keil V und betten ihn isometrisch in die hyperbolische Halbebene $\mathbb{H}$ ein. Hierbei muß untersucht werden, ob eine solche Einbettung existiert. Insbesondere muß man berücksichtigen, daß V nicht abgeschlossen ist und $p \notin V$ gilt. Es stellt sich heraus, daß dies kein Hindernis ist (Satz 3.2.14).

Nun betrachten wir eine Isometrie

$$\begin{aligned} i_V : (V, g_{\mathbb{H}}) &\to \big(i_V(V) \subset \mathbb{R}_+^* \times S^1, g_{N(p)}\big) \\ (x, \vartheta) &\mapsto \big(x, N(p)^{-1}\vartheta\big)\,. \end{aligned}$$

$N(p)^{-1}$ ist als Abbildung von $[0, 2\pi)$ in sich zu verstehen. Es wird $\mathbb{H} \supset V \cap (0, \infty) = \emptyset$ angenommen (Lemma 3.2.15). Da sich die Öffnungswinkel der einzelnen Keile zu $2\pi N(p)$ ergänzen, können diese nach Anwendung von i_V wieder an den Kanten verklebt werden (Lemmata 3.2.16 und 3.2.17).

Analog gibt es im Fall $C_S(g) = 0$ eine Isometrie

$$\begin{aligned} i : (U \setminus \{p\}, g_\psi) \to \big(i\,(U \setminus \{p\}) \subset \mathbb{R}_+^* \times S^1, \\ g_{N(p)} := dx^2 + N(p)^2 x^2 d\vartheta^2\big) \end{aligned}$$

(Theorem 3.2.18). Dies kann wie die entsprechende Aussage für $C_S(g) < 0$ gezeigt werden.

Ein unabhängiger Beweis der Aussagen sowohl für $C_S(g) < 0$ als auch für $C_S(g) = 0$ wurde von C. M. Judge gegeben ([J], Theorem 3.4).

Eine direkte Folgerung der Existenz von i ist, daß für hinreichend kleines ε die geodätischen Kreise

$$W_{\varepsilon}(g) := \{q \in S \mid \operatorname{dist}(p, q) = \varepsilon\}$$

glatt sind (Satz 3.2.20).

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 1 führen wir die im Folgenden benötigte Notation ein und stellen verschiedene Resultate bereit, die später verwendet werden. Des weiteren berechnen wir die Defektindizes des Laplaceoperators auf kompakten Riemannschen Flächen mit degenerierter Metrik wie oben beschrieben.

Kapitel 2 befaßt sich mit der Herleitung der Polyakov–Formel. Dazu zeigen wir zunächst die Wohldefiniertheit der ζ–regularisierten Determinante des Laplaceoperators und untersuchen verschiedene Eigenschaften der ζ–Funktion.

In Kapitel 3 führen wir schließlich die oben erwähnte Uniformisierung einer speziellen Klasse von kompakten Riemannschen Flächen mit degenerierter Metrik durch und zeigen die Regularität der uniformisierenden Funktion. Außerdem untersuchen wir das lokale Verhalten der uniformisierten Metriken in der Nähe von Singularitäten.

Notation

Sätze, Definitionen, Formeln etc. werden für jeden Abschnitt getrennt numeriert. Die einzige Ausnahme bilden Abbildungen, für die sich die Numerierung am Kapitel orientiert.

Bei Querverweisen werden Formeln in runde Klammern gesetzt. Das Ende von Beweisen wird durch eine Markierung der Art $\boxed{??}$ gekennzeichnet, wobei für ?? die Nummer des Satzes eingesetzt wird, zu dem der Beweis gehört.

Danksagungen

Zunächst gilt mein Dank Prof. Dr. J. Brüning, der das Thema zu dieser Arbeit stellte und mich seit Beginn meines Studiums fachlich begleitete.

Einen besonderen Dank möchte ich PD Dr. M. Lesch aussprechen, der immer ein offenes Ohr für meine Probleme hatte und dessen Engagement weit über das übliche Maß hinaus ging. In häufigen fachlichen Gesprächen ließ er mir viele wertvolle Hinweise zukommen.

Schließlich möchte ich mich bei I. Strößner für die orthographische Durchsicht der Arbeit bedanken.

Berlin, im September 1998 Wolfgang Strößner

1 Grundlagen

In diesem Kapitel soll die für diese Arbeit verwendete Notation eingeführt und einige bekannte Resultate über algebraische Kurven vorgestellt werden. Auf Beweise und die Einführung von in diesem Themengebiet als allgemein bekannt zu betrachtenden Begriffen werden wir verzichten. Sie können in vielen Lehrbüchern über algebraische Kurven bzw. algebraische Geometrie wie z.B. in [Fu], [GH], [H] oder [M] nachgelesen werden.

Weiterhin werden wir eine spezielle Klasse von degenerierten Metriken auf kompakten Riemannschen Flächen betrachten. Algebraische Kurven sind ein Spezialfall dieser Klasse.

Wir werden die hier eingeführte Notation für den Rest der vorliegenden Arbeit beibehalten, ohne sie jeweils aufs neue zu erklären.

1.1 Algebraische Kurven

Sei h eine hermitesche Metrik auf $\mathbb{C}P^n$. $M \subset \mathbb{C}P^n$, versehen mit der von h induzierten Metrik, die wir wiederum mit h bezeichnen, sei eine algebraische Kurve. Σ sei der singuläre Ort von M. Da $\Sigma \subset M$ diskret ist, folgt aus der Kompaktheit von M die Endlichkeit von Σ. Wir bezeichnen den regulären Teil von M bezüglich h mit

$$\overset{\circ}{M} := M \setminus \Sigma.$$

Dann gibt es zu M eine kompakte Riemannsche Fläche $\widetilde{M}$ und eine holomorphe Abbildung

$$\Phi : \widetilde{M} \to \mathbb{C}P^n$$

mit den folgenden Eigenschaften.

$$\Phi\left(\widetilde{M}\right) = M,$$

$$\Phi\Big|\Phi^{-1}\left(\overset{\circ}{M}\right) : \Phi^{-1}\left(\overset{\circ}{M}\right) \to \overset{\circ}{M}$$

ist biholomorph.

1.1.1 Definition: *$\widetilde{M}$ heißt Desingularisierung oder Auflösung von M. Φ nennt man desingularisierende Abbildung.*

Im Folgenden übernehmen wir die Darstellung von [BL2], S. 27f. Sei ein singulärer Punkt $q \in \Sigma$ gegeben. $L(q)$ sei die Anzahl der lokal irreduziblen Komponenten von $\overset{\circ}{M}$ nahe q. Wir wählen homogene Koordinaten $[z_0, \ldots, z_n]$ in $\mathbb{C}P^n$, so daß $q = [1, 0, \ldots, 0]$ gilt. Außerdem wählen wir eine Umgebung $U_q \subset \mathbb{C}P^n$ von q mit den folgenden Eigenschaften. Es gilt

$$U_q \cap \Sigma = \{q\},$$

und die Komponenten $U_{i,q}$ nahe q in $\overset{\circ}{M}$,

$$U_q \cap \overset{\circ}{M} = \bigcup_{1 \le i \le L(q)} U_{i,q}$$

sind zusammenhängend und paarweise disjunkt. Darüber hinaus gibt es für jedes $U_{i,q}$ eine biholomorphe Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : D_\varepsilon := \{ z \in \mathbb{C} |\ 0 < |z| < \varepsilon\} &\to U_{i,q}, \\ z &\mapsto [1, P_1(z), \ldots, P_n(z)], \end{aligned}$$

so daß alle P_l holomorph in D_ε sind, wobei für ein $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$

$$\begin{aligned} P_u(z) &\equiv 0 && \text{für } 1 \le u \le k-1, \\ P_k(z) &= z^{N_k}, \\ P_v(z) &= \sum_{l \ge N_v} a_{vl} z^l && \text{für } k+1 \le v \le n \end{aligned}$$

mit $N_k < N_{k+1} < \ldots < N_n$, $N_k \in \mathbb{N}$ gilt.

1.1.2 Definition: *Die obige Darstellung nennt man Normalform von M bei q.*

$$N_i(q) := N_k$$

heißt die Multiplizität der i–ten Komponente.

Punkte $q \in \Sigma$, für die $N_i(q) = 1$ für alle $i = 1, \ldots L(q)$ gilt, nennen wir Mehrfachpunkte.

1.1.3 Bemerkung: Es ist zu beachten, daß sich $\Phi^{-1}(\Sigma)$ und die Singularitätenmenge $\widetilde{\Sigma}$ von $\left(\widetilde{M}, \Phi^* h\right)$ im allgemeinen unterscheiden. Zwar gilt

$$\widetilde{\Sigma} \subset \Phi^{-1}(\Sigma),$$

die umgekehrte Relation ist aber im allgemeinen falsch. So sind etwa die Urbilder von Mehrfachpunkten unter Φ reguläre Punkte von $\widetilde{M}$. Die Urbilder von Punkten q, bei denen einige, aber nicht alle der $N_i(q)$ gleich 1 sind, sind teils reguläre, teils singuläre Punkte von $\widetilde{M}$.

1.1.4 Beispiel: Wir betrachten

$$S = \mathbb{C}P^1 \simeq S^2$$

und

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}P^1 &\to \mathbb{C}P^2, \\ [X, Y] &\mapsto \left[X^k, X^{k-l}Y^l, Y^k\right] \end{aligned}$$

mit k, $l \in \mathbb{N}$, $k > l \geq 2$ und k und l relativ prim.

$$M = \Phi(S) \subset \mathbb{C}P^2$$

besitzt eine lokal irreduzible Singularität der Multiplizität l bei $[1, 0, 0]$. Die zugehörige Abbildung ψ ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \psi : D_\varepsilon &\to U_{[1,0,0]}, \\ z &\mapsto \left[1, z^l, z^k\right]. \end{aligned}$$

Falls $k - l \geq 2$ ist, dann hat M eine zweite lokal irreduzible Singularität bei $[0, 0, 1]$ der Multiplizität $k - l$.

M ist die algebraische Kurve, die durch das Polynom

$$Y^k - Z^l X^{k-l}$$

in $\mathbb{C}P^2$ induziert wird. M hat lediglich bei $\Phi([1, 0])$ sowie im Fall $k - l \geq 2$ zusätzlich bei $\Phi([0, 1])$ eine Singularität.

Für $[1, Y_i] \in \mathbb{C}P^1$ mit $\Phi[1, Y_i] \in \overset{\circ}{M}$, $i = 1$, 2 und

$$\Phi[1, Y_1] = \Phi[1, Y_2]$$

gilt $|Y_1| = |Y_2|$ sowie

$$l \cdot \arg Y_1 = l \cdot \arg Y_2$$

und

$$k \cdot \arg Y_1 = k \cdot \arg Y_2.$$

Da k und l nach Voraussetzung relativ prim sind, folgt $Y_1 = Y_2$.

Für $[X_i, 1] \in \mathbb{C}P^1$ mit $\Phi\,[X_i, 1] \in \overset{\circ}{M}$, $i = 1, 2$ und

$$\Phi\,[X_1, 1] = \Phi\,[X_2, 1]$$

folgt entsprechend $X_1 = X_2$, weil entweder $k - l = 1$ gilt oder k und $k - l$ relativ prim sind.

Folglich ist die Abbildung

$$\Phi|\,\Phi^{-1}\left(\overset{\circ}{M}\right) \to \overset{\circ}{M}$$

bijektiv und daher biholomorph. Daraus erhalten wir, daß $S = \mathbb{C}P^1$ die Auflösung von M ist.

Mit $k = 3$ und $l = 2$ erhält man die Neillsche Parabel

$$M = \left\{[X, Y, Z] \in \mathbb{C}P^2 \;\middle|\; Y^3 = Z^2 X \right\}.$$

1.2 Kompakte Riemannsche Flächen mit degenerierter Metrik

Wir wollen nun, motiviert durch die algebraischen Kurven, eine spezielle Klasse von degenerierten Metriken auf kompakten Riemannschen Flächen einführen.

1.2.1 Definition: *Wir betrachten eine kompakte Riemannsche Fläche S. $\Sigma \subset S$ sei eine endliche Teilmenge und g ein glatter 2–Tensor auf S mit den folgenden Eigenschaften. g eingeschränkt auf*

$$\overset{\circ}{S} := S \setminus \Sigma$$

ist eine glatte Riemannsche Metrik. Zu jedem $p \in \Sigma$ gibt es eine offene Umgebung $U_p \subset S$, für die

$$U_p \cap \Sigma = \{p\}$$

und

$$U_p \setminus \{p\} \simeq D_\varepsilon = \{\, z \in \mathbb{C}|\; 0 < |z| < \varepsilon\}$$

gilt. Auf U_p gilt mit $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$

$$g = h\left(dx^2 + dy^2\right),$$

wobei

$$h \in C^{\infty}\left(D_{\varepsilon} \cup \{0\}\right),$$
$$h\left(z, \overline{z}\right) = N\left(p\right)^2 |z|^{2N(p)-2} + O\left(|z|^{2N(p)-1}\right)$$

gilt. $N\left(p\right) \in \mathbb{N}$ *heißt die Multiplizität von* p*.* Σ *heißt der singuläre Ort von* (S, g)*.*

Die Klasse aller solcher degenerierten Metriken auf S *bezeichnen wir mit* $\mathcal{G}\left(S\right)$*.*

1.2.2 Bemerkung: Alle glatten Riemannschen Metriken auf einer kompakten Riemannschen Fläche S sind in $\mathcal{G}\left(S\right)$ enthalten. In diesem Fall gilt $\Sigma = \emptyset$.

1.2.3 Bemerkung: Auf einer Umgebung U um $p \in \Sigma$ nimmt die Metrik g in Polarkoordinaten

$$(r, \vartheta) \in (0, \varepsilon) \times S^1$$

wie in [BL2], S. 28 die Gestalt

$$g\left(r, \vartheta\right) = \alpha\left(r^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta\right)^2 dr^2 + \beta\left(r^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta\right)^2 N\left(p\right)^2 r^2 d\vartheta^2 \tag{1.2.1}$$

an. Dabei sind α und $\beta \in C^{\infty}\left([0, \varepsilon) \times S^1\right)$ mit

$$\alpha\left(0, \,.\,\right) = \beta\left(0, \,.\,\right) \equiv 1 \tag{1.2.2}$$

gegeben. Mit Definition 1.2.1 sieht man konkret, daß nach einem Koordinatenwechsel $u := r^{N(p)}$

$$\alpha\left(r^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta\right) = \beta\left(r^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta\right) = \left(1 + h_1\left(u^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + h_1\left(r, \vartheta\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

gilt. h_1 ist wie folgt definiert. Die Funktion h aus Definition 1.2.1 kann man in Polarkoordinaten schreiben als

$$h\left(r, \vartheta\right) = N\left(p\right)^2 r^{2N(p)-2}\left(1 + h_1\left(r, \vartheta\right)\right)$$

mit

$$h_1 \in C^{\infty}\left([0, \varepsilon) \times S^1\right), \quad h_1\left(0, \,.\,\right) \equiv 0.$$

1.2.4 Lemma: *Sei g ein glatter 2–Tensor auf S, der eingeschränkt auf $\overset{\circ}{S}$ eine glatte Riemannsche Metrik darstellt. Mit $p \in \Sigma$, U_p und h wie in Definition 1.2.1 gelte auf U_p*

$$g = f \cdot h \left(dx^2 + dy^2\right)$$

mit $f \in C^\infty\left(D_\varepsilon \cup \{0\}\right)$, $f \geq C > 0$. Dann gilt $g \in \mathcal{G}\left(S\right)$. p hat die gleiche Multiplizität bezüglich g und $\frac{1}{f}g$.

Beweis: Mit dem Koordinatenwechsel

$$\widetilde{x} := f\left(0\right)^{\frac{1}{2}} x, \quad \widetilde{y} := f\left(0\right)^{\frac{1}{2}} y$$

und $\widetilde{z} = \widetilde{x} + i\widetilde{y}$ gilt

$$g = \widetilde{h}\left(d\widetilde{x}^2 + d\widetilde{y}^2\right)$$

mit

$$\widetilde{h} \in C^\infty\left(D_\varepsilon \cup \{0\}\right),$$

$$\widetilde{h}\left(\widetilde{z}, \overline{\widetilde{z}}\right) = N\left(p\right)^2 \left|\widetilde{z}\right|^{2N(p)-2} + O\left(\left|\widetilde{z}\right|^{2N(p)-1}\right).$$

Dabei bezeichnet $N\left(p\right)$ die Multiplizität von p bezüglich der Metrik $\frac{1}{f}g$. Es gilt

$$\widetilde{h} = \frac{f}{f\left(0\right)} h.$$

$\boxed{1.2.4}$

1.2.5 Bemerkung: Sei h eine hermitesche Metrik auf $\mathbb{C}P^n$ und

$$M \subset \mathbb{C}P^n$$

eine algebraische Kurve.

$$\psi : \widetilde{M} \to M$$

sei die Auflösung von M. Dann gilt

$$\widetilde{g} := \psi^* h \in \mathcal{G}\left(\widetilde{M}\right)$$

([L2], Beispiel 1 auf S. 21). Die Multiplizitäten im Sinne von Definition 1.1.2 und Definition 1.2.1 stimmen überein, weil $\widetilde{g}$ in einer Umgebung einer Singularität p der Multiplizität $N(p)$ (im Sinne von Definition 1.1.2) die Gestalt

$$\widetilde{g} = \widetilde{h}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

mit $\widetilde{h} \in C^\infty(D_\varepsilon \cup \{0\})$,

$$\widetilde{h}(z, \overline{z}) = C \cdot N(p)^2 |z|^{2N(p)-2} + O\left(|z|^{2N(p)-1}\right)$$

annimmt, wie in [BL2] S. 40f ausgeführt wird. Der skalare Faktor C kann durch den Koordinatenwechsel

$$\widetilde{x} := C^{\frac{1}{2}} x, \quad \widetilde{y} := C^{\frac{1}{2}} y$$

wegtransformiert werden (vgl. Lemma 1.2.4).

1.2.6 Definition: ([BL1], Abschnitt 2) *Sei W eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension w mit einer offenen Teilmenge $U \subset W$ mit den folgenden Eigenschaften.*

$$W_1 := W \setminus U$$

ist eine vollständige Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand X,

$$\dim X = w - 1 =: x.$$

U ist isometrisch zu $(0, \varepsilon) \times X$ mit Metrik

$$g = h(y)^2 \left(dy^2 + y^2 g_X(y)\right),$$

wobei $g_X(y)$ eine Familie von Metriken auf X ist, so daß $g_X(y)$ glatt auf $(0, \varepsilon)$ und stetig auf $[0, \varepsilon)$ ist, und für

$$h \in C^\infty((0, \varepsilon) \times X)$$

gilt

$$\sup_{p \in X} \left| \left(y \frac{\partial}{\partial y}\right)^j \left(y^{-c} h(y, p) - 1\right) \right| = O\left(y^\delta\right) \quad \text{für } x \to 0, \ j = 0, 1$$

und

$$\sup_{p \in X} \left\| h(y, p)^{-1} d_X h(y, p) \right\|_{T_p^* X, g_X(y)} = O\left(y^\delta\right) \quad \text{für } x \to 0$$

mit $\delta > 0$ und $c > -1$. dx steht für die äußere Ableitung auf X.

Wir betrachten

$$g^0 := dy^2 + y^2 g_X(0),$$
$$g^1 := h^{-2} g = dy^2 + y^2 g_X(y)$$

und bezeichnen mit ∇^0 *und* ∇^1 *die Levi–Civita–Zusammenhänge für* g^0 *und* g^1 *mit Zusammenhangsformen* ω^0 *und* ω^1. *Dann gelte*

$$\sup_{p\in X}\left(\left|g^1(y,p) - g^0(y,p)\right|_{g^0} + y\left|\omega^0(y,p) - \omega^1(y,p)\right|_{g^0}\right) = O\left(y^\delta\right)$$
$$\text{für} \quad x \to 0.$$

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (W,g), *die all diese Eigenschaften erfüllt, heißt konform kegelartige Mannigfaltigkeit.*

1.2.7 Lemma: *Sei* S *eine kompakte Riemannsche Fläche und* $g \in \mathcal{G}(S)$. *Dann ist* (S,g) *eine konform kegelartige Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Dies sieht man, wenn man Polarkoordinaten um eine Singularität einführt (vgl. Formel (1.2.1) und [L2], Beispiel 1 auf S. 21).

$\boxed{1.2.7}$

1.2.8 Definition: *Sei* X *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.* E *und* F *seien Vektorraumbündel über* X. *Für einen auf* $C_0^\infty(E)$ *definierten Differentialoperator* $P \in \mathrm{Diff}(E,F)$ *definieren wir* P_{min} *als den Abschluß von* P *und* P_{max} *durch*

$$P_{max} := \left(P_{min}^t\right)^*.$$

Dabei steht P^t *für den formal adjungierten Operator zu* P. P_{max} *ist die maximale abgeschlosse Fortsetzung von* P, *so daß* $C_0^\infty(F)$ *im Definitionsbereich des Adjungierten enthalten ist. Ein abgeschlossener Operator* T, *für den*

$$P_{min} \subset T \subset P_{max}$$

gilt, heißt ideale Randbedingung von P.

1.2.9 Definition und Theorem: *Sei* S *eine kompakte Riemannsche Fläche und* $g \in \mathcal{G}(S)$. *Für die äußere Ableitung* d, *definiert auf* $C_0^\infty\left(\bigwedge T^*\overset{\circ}{S}\right)$, *gilt im Hilbertraum* $L^2\left(\bigwedge T^*S\right)$

$$d_{max} = d_{min}.$$

d besitzt also eine eindeutige ideale Randbedingung, die wir mit D bezeichnen. D hängt nicht von der konkret gewählten Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$ ab. Der Laplaceoperator

$$\Delta := \bigoplus_{i=0}^{2} \Delta_i := (D + D^*)^2$$

ist positiv und selbstadjungiert. Δ_i operiert auf Formen der Stufe i. Δ_0 ist die Friedrichsfortsetzung von

$$\left(d + d^t\right)^2 \Big| C_0^\infty \left(\overset{\circ}{M}\right)$$

in $L^2(M)$. Schließlich ist für $i = 0, 1, 2$

$$\Delta_i = \Delta \Big| L^2 \left(\bigwedge^i T^* M\right)$$

diskret in dem Sinne, daß das wesentliche Spektrum leer ist.

Beweis: Da (S, g) gemäß Lemma 1.2.7 eine konform kegelartige Mannigfaltigkeit im Sinne von Definition 1.2.6 ist, folgt die Aussage aus [BL1], Lemma 3.1 und [BL1], Theorem 3.7.

$\boxed{1.2.9}$

1.2.10 Bemerkung: Die Aussage von Definition und Theorem 1.2.9 für den Spezialfall der algebraischen Kurven findet man in [BL2], Theorem 1.1.

1.3 Die Defektindizes des Laplaceoperators

Wir wollen die Defektindizes

$$n_\pm(\Delta) := \dim \ker (\Delta_{max} \mp i)$$

des Laplaceoperators bezüglich $C_0^\infty \left(\overset{\circ}{S}\right)$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche S mit Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$ und singulärem Ort Σ berechnen.

Es wird sich herausstellen, daß $n_+(\Delta)$ und $n_-(\Delta)$ im allgemeinen nicht verschwinden, der Laplaceoperator also im allgemeinen nicht wesentlich selbstadjungiert ist.

Da der Laplaceoperator reell ist, gilt

$$n_+(\Delta) = n_-(\Delta) . \tag{1.3.1}$$

Zunächst zeigen wir in enger Anlehnung an das Lokalisationsprinzip aus [L1], Abschnitt 2, daß die Defektindizes lokal in einer Umgebung des singulären Ortes berechnet werden können.

Sei M eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit. Δ_M sei der Laplaceoperator auf Funktionen auf M.

Wir betrachten auf $\mathcal{D}\left(\Delta_{M,max}\right)$ die hermitesche Sesquilinearform

$$q_{\Delta_M}\left(x,y\right) := -i\left(\left(\Delta_{M,max}x,y\right) - \left(x,\Delta_{M,max}y\right)\right),$$

$x, y \in \mathcal{D}\left(\Delta_{M,max}\right)$. Für $x \in \mathcal{D}\left(\Delta_{M,min}\right)$ oder $y \in \mathcal{D}\left(\Delta_{M,min}\right)$ gilt

$$q_{\Delta_M}\left(x,y\right) = 0,$$

so daß q_{Δ_M} eine hermitesche Sesquilinearform auf $\mathcal{D}\left(\Delta_{M,max}\right)/\mathcal{D}\left(\Delta_{M,min}\right)$ induziert, die wir wiederum mit q_{Δ_M} bezeichnen. Für $x \in \ker\left(\Delta_{M,max} \mp i\right)$ erhalten wir

$$q_{\Delta_M}\left(x,x\right) = \pm 2\left\|x\right\|_{L^2}^2.$$

Für

$$x \perp \ker\left(\Delta_{M,max} - i\right) \oplus \ker\left(\Delta_{M,max} + i\right)$$

gilt

$$q_{\Delta_M}\left(x,x\right) = 2\,\mathrm{Im}\left(\Delta_{M,max}x,x\right) = 0.$$

Wenn wir die Dimension des maximalen Unterraums von

$$\mathcal{D}\left(\Delta_{M,max}\right)/\mathcal{D}\left(\Delta_{M,min}\right),$$

auf dem q_{Δ_M} positiv bzw. negativ definit ist, mit $n_\pm\left(q_{\Delta_M}\right)$ bezeichnen, folgt also

$$n_\pm\left(\Delta_M\right) = n_\pm\left(q_{\Delta_M}\right). \tag{1.3.2}$$

Wir betrachten nun eine offene Teilmenge $U \subset M$, so daß

$$M_0 := M \setminus U$$

eine vollständige Mannigfaltigkeit mit kompaktem Rand

$$W := \partial M_0$$

ist. Da M orientierbar ist, ist das Normalenbündel über W trivial, und es gibt eine Tubenumgebung

$$V = (-\varepsilon,\varepsilon) \times W$$

um W mit

$$U \cap V = (-\varepsilon, 0) \times W, \qquad M_0 \cap V = [0, \varepsilon) \times W.$$

Wir setzen für $t \in (0, \varepsilon)$

$$U_t := U \setminus ([-t, 0) \times W)$$

und

$$M_t := M \setminus U_t.$$

Mit Δ_U bezeichnen wir die Einschränkung von Δ_M auf $C_0^\infty(U)$. Wir setzen

$$\mathcal{KD}\left(\Delta_{U,min/max}\right) := \left\{ \xi \in \mathcal{D}\left(\Delta_{U,min/max}\right) \middle| \operatorname{supp} \xi \subset U_t \text{ für ein } t > 0 \right\}.$$

Wegen $\operatorname{supp} \xi \subset U$ liegt die triviale Fortsetzung von

$$\xi \in \mathcal{KD}\left(\Delta_{U,min/max}\right)$$

auf M in $\mathcal{D}\left(\Delta_{M,min/max}\right)$. Daher erhalten wir eine natürliche Einbettung

$$\alpha : \mathcal{KD}\left(\Delta_{U,max}\right) \hookrightarrow \mathcal{D}\left(\Delta_{M,max}\right) \tag{1.3.3}$$

mit

$$\alpha\left(\mathcal{KD}\left(\Delta_{U,min}\right)\right) \subset \mathcal{D}\left(\Delta_{M,min}\right). \tag{1.3.4}$$

1.3.1 Satz (Lokalisationsprinzip): (vgl. [L1], Theorem 2.1) *α induziert einen Isomorphismus*

$$\overline{\alpha} : \mathcal{KD}\left(\Delta_{U,max}\right)/\mathcal{KD}\left(\Delta_{U,min}\right) \to \mathcal{D}\left(\Delta_{M,max}\right)/\mathcal{D}\left(\Delta_{M,min}\right).$$

Wenn q_{Δ_U} die Sesquilinearform zu Δ_U, eingeschränkt auf

$$\mathcal{KD}\left(\Delta_{U,max}\right)/\mathcal{KD}\left(\Delta_{U,min}\right)$$

ist, dann gilt

$$n_\pm\left(\Delta_M\right) = n_\pm\left(q_{\Delta_U}\right).$$

Beweis: Wegen den Formeln (1.3.3) und (1.3.4) ist $\overline{\alpha}$ eine wohldefinierte lineare Abbildung.

Wir beweisen zunächst die Surjektivität von $\overline{\alpha}$. Dazu wählen wir ein $\xi \in \mathcal{D}(\Delta_{M,max})$ und ein $\mu \in C^\infty(M)$, das in einer Umgebung von M_0 konstant 1 ist und auf U_t, $t \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ verschwindet. Dann gilt

$$\Delta_M((1-\mu)\xi) = (1-\mu)\Delta_M\xi + 2\langle\nabla\mu, \nabla\xi\rangle - (\Delta_M\mu)\xi,$$

Weil $\nabla\mu$ beschränkt ist, wegen der Elliptizität des Laplaceoperators

$$\nabla\xi \in L^2_{loc}(TM)$$

gilt und

$$\operatorname{supp}(\langle\nabla\mu, \nabla\xi\rangle + (\Delta_M\mu)\xi) \subset M_t \setminus M_0$$

kompakt ist, folgt

$$(1-\mu)\xi \in \mathcal{KD}(\Delta_{U,max}).$$

Wir erweitern M_{2t} um einen Zylinder $(-\infty, -2t) \times W$, so daß die resultierende Mannigfaltigkeit X vollständig ist. Aus [Wo], Theorem 6.1 folgt, daß der Laplaceoperator Δ_X auf X wesentlich selbstadjungiert ist und es daher eine Folge $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(X)$ gibt mit

$$\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mu\xi$$

und

$$\Delta_X\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \Delta_X(\mu\xi) = \Delta_M(\mu\xi).$$

Hier wird $\Delta_M(\mu\xi)$ mit seiner trivialen Fortsetzung auf X identifiziert. Man wähle eine Abschneidefunktion $\psi \in C^\infty(X)$ mit $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung V von $\operatorname{supp}\mu$ und mit $\operatorname{supp}\psi \subset M_{\frac{3}{2}t}$. Mit

$$\xi_n := \psi\nu_n \in C_0^\infty(M)$$

folgt

$$\|\xi_n - \mu\xi\|_{L^2} = \|\psi\nu_n - \psi\mu\xi\|_{L^2} \leq \|\nu_n - \mu\xi\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\Delta_M\xi_n &= \psi\Delta_X\nu_n - 2\langle\nabla\psi, \nabla\nu_n\rangle + (\Delta_X\psi)\nu_n \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \psi\Delta_X(\mu\xi) = \Delta_M(\mu\xi),\end{aligned}$$

weil $\Delta_X \psi$ sowie $\nabla \psi$ beschränkt sind. Es gilt nämlich

$$\nabla \nu_n | M_{\frac{3}{2}t} \setminus V \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \nabla (\mu\xi) | M_{\frac{3}{2}t} \setminus V = 0$$

sowie

$$\nu_n | M_{\frac{3}{2}t} \setminus V \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mu\xi | M_{\frac{3}{2}t} \setminus V = 0.$$

Es folgt

$$\mu\xi \in \mathcal{D} \left(\Delta_{M,min} \right)$$

und damit die Surjektivität von $\overline{\alpha}$.

Nun kommen wir zum Beweis der Injektivität von $\overline{\alpha}$. Wir wählen ein

$$\xi \in \mathcal{K}\mathcal{D} \left(\Delta_{U,max} \right) \cap \mathcal{D} \left(\Delta_{M,min} \right).$$

Es ist zu zeigen, daß

$$\xi \in \mathcal{D} \left(\Delta_{U,min} \right)$$

gilt.

Aus $\xi \in \mathcal{D} \left(\Delta_{M,min} \right)$ wissen wir, daß es eine Folge $\left(\nu_n \right)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty (M)$ mit

$$\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi$$

und

$$\Delta_M \nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \Delta_M \xi$$

gibt. Man wähle eine Abschneidefunktion $\mu \in C_0^\infty (M)$ mit $\mu \equiv 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} \xi$ und $\operatorname{supp} \mu \subset U_t$ für ein $t > 0$. Es gilt $\mu\nu_n \in C_0^\infty (U)$. Wie im Beweis der Surjektivität kann man

$$\mu\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \xi$$

und

$$\Delta_M \left(\mu\nu_n \right) \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \Delta_M \xi$$

zeigen.

Schließlich ist die Aussage

$$n_{\pm}(\Delta_M) = n_{\pm}(q_{\Delta_U})$$

zu zeigen. Da $\overline{\alpha}$ ein Isomorphismus ist, gilt

$$n_{\pm}(q_{\Delta_U}) = n_{\pm}(q_{\Delta_M}) = n_{\pm}(\Delta_M),$$

weil

$$q_{\Delta_U} = \overline{\alpha}^* q_{\Delta_M}.$$

$\boxed{1.3.1}$

Wir wollen nun das Lokalisationsprinzip auf $\overset{\circ}{S}$ anwenden. Dazu betrachten wir eine Umgebung

$$\bigcup_{p\in\Sigma} U_p \subset \overset{\circ}{S}$$

um Σ, wobei jedes U_p eine Umgebung von p ist. Gegebenenfalls nach Verkleinerung der einzelnen U_p dürfen wir annehmen, daß sie paarweise disjunkt sind. Gemäß Definition 1.2.1 kann durch glatte Fortsetzung der jeweiligen Metrik jedes dieser U_p erweitert werden zu $\mathbb{R}_+ \times S^1$ mit Metrik

$$g_p(y,\varphi) = h_p(y,\varphi)^2 \left(dy^2 + y^2 d\varphi^2\right)$$

mit einer glatten Funktion h_p, für die nahe $\{0\} \times S^1$

$$h_p(y,\varphi) = N(p)\, y^{N(p)-1} a_p(y,\varphi)$$

mit

$$a_p \in C^\infty\left([0,\varepsilon) \times S^1\right), \quad a_p(0,\,.\,) \equiv 1$$

gilt. $N(p)$ steht für die Multiplizität der Singularität bei p. Dann gilt mit Satz 1.3.1

$$n_{\pm}(\Delta) = \sum_{p\in\Sigma} n_{\pm}(\Delta_p),$$

wobei hier Δ_p für den Laplaceoperator im Hilbertraum

$$L^2\left(\mathbb{R}_+ \times S^1, y h_p^2 dy\, d\varphi\right)$$

steht. Es gilt

$$\Delta_p = -\sum_{i,j=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{g_p}} \partial_i \sqrt{g_p} g_p^{ij} \partial_j .$$

Wir betrachten die unitäre Transformation

$$\begin{aligned} \tau_p : L^2\left(\mathbb{R}_+ \times S^1, y h_p^2 dy\, d\varphi\right) &\to L^2\left(\mathbb{R}_+ \times S^1, dy\, d\varphi\right), \\ f &\mapsto y^{\frac{1}{2}} h_p f. \end{aligned}$$

Dann gilt mit

$$\widetilde{\Delta}_p := \tau_p \Delta_p \tau_p^{-1}$$

die Gleichheit

$$n_\pm\left(\Delta_p\right) = n_\pm\left(\widetilde{\Delta}_p\right).$$

Eine längere, aber direkte Rechnung ergibt

$$\widetilde{\Delta}_p \Big| (0,\varepsilon) \times S^1 = y^{-2N(p)} \sum_{k=0}^{2} A_k\left(y\right) \left(-y \frac{\partial}{\partial y}\right)^k$$

mit

$$\begin{aligned} A_0\left(y\right) =& - N\left(p\right)^{-2} a_p^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2N\left(p\right)^{-2} a_p^{-3} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} a_p\right) \frac{\partial}{\partial \varphi} - a_p^{-2} \\ & - \frac{1}{4} N\left(p\right)^{-2} a_p^{-2} + N\left(p\right)^{-1} a_p^{-2} - 2N\left(p\right)^{-2} a_p^{-4} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} a_p\right)^2 \\ & + N\left(p\right)^{-2} a_p^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} a_p\right) + 2N\left(p\right)^{-2} y a_p^{-3} \left(\frac{\partial}{\partial y} a_p\right) \\ & - 2N\left(p\right)^{-1} y a_p^{-3} \left(\frac{\partial}{\partial y} a_p\right) - 2N\left(p\right)^{-2} y^2 a_p^{-4} \left(\frac{\partial}{\partial y} a_p\right)^2 \\ & + N\left(p\right)^{-2} y^2 a_p^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} a_p\right), \\ A_1\left(y\right) =& N\left(p\right)^{-2} a_p^{-2} - 2N\left(p\right)^{-1} a_p^{-2} - 2N\left(p\right)^{-2} y a_p^{-3} \left(\frac{\partial}{\partial y} a_p\right), \\ A_2\left(y\right) =& - N\left(p\right)^{-2} a_p^{-2}. \end{aligned}$$

Es gilt für $k = 0, 1, 2$

$$A_k \in C^\infty\left(\left[0, \varepsilon\right), \mathrm{Diff}_{\leq 2-k}\left(S^1\right)\right)$$

und daher $\widetilde{\Delta}_p \in \mathrm{Diff}^{2,2N(p)}_{sm}$ im Sinne von [L2], Definition 1.1.11. Für das Mellin–Hauptsymbol (siehe [L2], Definition 1.1.4) von $\widetilde{\Delta}_p$ gilt

$$\begin{aligned}\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)(z) &:= \sum_{k=0}^{2} A_k\,(y)\,(0)\,z^k \\ &= -\frac{1}{N(p)^2}\left(\left(z+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right).\end{aligned}$$

$\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)(z)$ ist genau dann invertierbar, wenn

$$\left(z+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2 \notin \operatorname{spec}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)=\left\{k^2 \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\},$$

also genau dann, wenn

$$z+N(p)-\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}.$$

Die Menge

$$R:=\left\{z\in\Gamma_{\frac{1}{2}-2N(p),\frac{1}{2}} \,\middle|\, \sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)(z)\ \text{ ist nicht invertierbar}\right\}$$

mit

$$\Gamma_{c,c'}:=\{z\in\mathbb{C}\mid c<\operatorname{Re} z<c'\}$$

enthält genau $2N(p)-1$ Elemente.

1.3.2 Definition: *Wir definieren $r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0)$, $z_0\in R$ wie folgt (vgl. Definition 1.3.4 aus [L2]). Wenn*

$$\sum_{k=0}^{m_{z_0}} R_{z_0,k}\,(z-z_0)^{-(k+1)}$$

der Hauptteil der Laurent–Entwicklung von $\left(\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)\right)^{-1}$ um z_0 ist, dann ist

$$T:\bigoplus_{l=0}^{m_{z_0}} L^2\left(S^1\right)\to\bigoplus_{l=0}^{m_{z_0}} L^2\left(S^1\right),$$

$$(Tf)_l:=\sum_{k=l}^{m_{z_0}} R_{z_0,k}f_{k-l}$$

ein Operator von endlichem Rang. Wir setzen

$$r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0):=\operatorname{rank}(T).$$

Mit diesem so definierten $r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0)$ gilt nun gemäß [L2], Korollar 1.3.17

$$\dim\left(\mathcal{D}\left(\widetilde{\Delta}_{p,max}\right)/\mathcal{D}\left(\widetilde{\Delta}_{p,min}\right)\right)=\sum_{z_0\in R} r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0).$$

Weiterhin ergibt sich aus [L2], Note 4.1.3 und den Formeln (1.3.1) und (1.3.2)

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathcal{D}\left(\widetilde{\Delta}_{p,max}\right)/\mathcal{D}\left(\widetilde{\Delta}_{p,min}\right)\right)&=\operatorname{rank}\left(q_{\widetilde{\Delta}_p}\right)\\&=n_+\left(\widetilde{\Delta}_p\right)+n_-\left(\widetilde{\Delta}_p\right)=2n_\pm\left(\widetilde{\Delta}_p\right).\end{aligned}$$

Es bleibt $r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0)$ für $z_0\in R$ zu berechnen.

Es gilt

$$\begin{aligned}&\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)(z)\\&=\underbrace{-\frac{1}{N(p)^2}\left(\left(z+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2-\left(z_0+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2\right)}_{\text{operiert auf dem Eigenraum zum Eigenwert }\left(z_0+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2\text{ bzgl. }-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}}\oplus\underbrace{P_z}_{\text{invertierbar bei }z-z_0}\\&=\frac{1}{N(p)^2}(z-z_0)(1-2N(p)+z+z_0)\oplus P_z=:f_{z_0}(z)\oplus P_z.\end{aligned}$$

Falls $z_0\neq N(p)-\frac{1}{2}$ ist, gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_{z_0}(z)}=&\frac{N(p)^2}{(-1+2N(p)-2z_0)}(z-z_0)^{-1}\\&+\frac{N(p)^2}{(-1+2N(p)-2z_0)}+O(z-z_0),\end{aligned}$$

woraus

$$R_{z_0,0}=\frac{N(p)^2}{(-1+2N(p)-2z_0)}\oplus 0$$

folgt, wobei $\frac{N(p)^2}{(-1+2N(p)-2z_0)}$ auf dem Eigenraum von $-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ zum Eigenwert $\left(z_0+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2$ operiert. Es gilt $m_{z_0}=0$ und

$$\begin{aligned}T:L^2\left(S^1\right)&\to L^2\left(S^1\right),\\f&\mapsto\begin{cases}\frac{N(p)^2}{(-1+2N(p)-2z_0)}f & \text{für } f\in E_{\left(z_0+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2},\\0 & \text{für } f\perp E_{\left(z_0+N(p)-\frac{1}{2}\right)^2},\end{cases}\end{aligned}$$

woraus

$$r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0) = \operatorname{rank} T = 2$$

folgt. E_λ steht für den Eigenraum von $-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ zum Eigenwert λ.

Im Fall $z_0 = N(p) - \frac{1}{2}$ gilt

$$f_{z_0}(z) = \frac{1}{N(p)^2}(z - z_0)^2 .$$

Daraus erhalten wir $m_{z_0} = 1$, $R_{z_0,0} = 0$, $R_{z_0,1} = N(p)^2$ und

$$\begin{aligned} T : L^2\left(S^1\right)^2 &\to L^2\left(S^1\right)^2, \\ (f_0, f_1) &\mapsto N(p)^2 (f_1, f_0) . \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall gilt also

$$r_{\sigma^{2,2N(p)}\left(\widetilde{\Delta}_p\right)}(z_0) = \operatorname{rank} T = 2.$$

Zusammenfassend erhalten wir nun das folgende Theorem.

1.3.3 Theorem: *Für die Defektindizes von Δ gilt*

$$n_\pm(\Delta) = \sum_{p\in\Sigma} (2N(p) - 1) .$$

1.3.4 Bemerkung: Es ist zu beachten, daß hebbare Singularitäten (also Singularitäten der Multiplizität 1) sich auf die Defektindizes des Laplaceoperators auswirken. Jede solche Singularität erhöht die Defektindizes um 1. Daher ist es entscheidend, ob man in der Definition von $\overset{\circ}{S}$ hebbare Singularitäten bei Punkten mit glatter Metrik als Singularitäten betrachtet oder nicht. Das kann etwa bei Auflösungen algebraischer Kurven relevant sein, wenn man entscheiden muß, ob die Urbilder von Mehrfachpunkten unter der desingularisierenden Abbildung als Singularitäten betrachtet werden oder nicht.

Der Laplaceoperator ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $\overset{\circ}{S}$ vollständig ist, also falls keine Singularitäten (auch keine hebbaren) auftreten.

1.4 Zugrundeliegende Ergebnisse

Es sollen einige Ergebnisse vorgestellt werden, die für die weiteren Überlegungen von Interesse sind. Beweise werden ausgelassen, soweit sie in der jeweils angegebenen Quelle zu finden sind. Unter anderem handelt es sich um Resultate aus [BL2] zu Eigenschaften der asymptotischen Entwicklung der Wärmeleitungsspur auf algebraischen Kurven. Viele der dort durchgeführten Überlegungen können für die Herleitung der Polyakov–Formel auf den in dieser Arbeit betrachteten Flächen verwendet oder angepaßt werden.

Das Singular Asymptotics Lemma (SAL) ist ein wesentliches Resultat von J. Brüning und R. Seeley, das unter geeigneten Voraussetzungen die asymptotische Entwicklung bestimmter Funktionen liefert. Wir werden es in Abschnitt 2.4 wieder aufgreifen, um die Asymptotik der Wärmeleitungsspur unter Variation der zugrundeliegenden Metrik herzuleiten.

1.4.1 Singular Asymptotics Lemma (SAL): ([BS1], S. 135) *Sei C der Sektor*

$$C := \{\xi \in \mathbb{C} |\ |\arg \xi| < \pi - \varepsilon\},$$

$\varepsilon > 0$ *und* $\sigma : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{C}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *σ ist eine in C analytische und in der ersten Variable beliebig oft differenzierbare Funktion mit in C analytischen Ableitungen.*

(2) *σ hat eine Entwicklung der Form*

$$\sigma(x,\xi) \sim_{\substack{|\xi|\to\infty \\ \xi \in C}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m_k} \sigma_{\alpha_k,m}(x)\, \xi^{\alpha_k} (\log \xi)^m ,$$

wobei jedes $\sigma_{\alpha_k,m}$ im Schwartz–Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegt, α_k eine diskrete Menge komplexer Zahlen durchläuft, so daß

$$\operatorname{Re} \alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$$

gilt und alle m_k endlich sind.

Das soll bedeuten, daß es für $x \in \mathbb{R}_+$, $\xi \in C$ mit $|\xi| \geq 1$, $0 < x \leq \frac{|\xi|}{c_0}$, für eine Konstante c_0 und nichtnegative ganze Zahlen J, K und M Konstanten $C_{J,K,M}$ gibt, so daß gilt

$$\left| x^J \frac{\partial^K}{\partial x^K} \left(\sigma(x,\xi) - \sum_{\operatorname{Re}\alpha_k > -M} \sum_{m=0}^{m_k} \sigma_{\alpha_k,m}(x)\, \xi^{\alpha_k} \log^m \xi \right) \right| \leq C_{J,K,M} |\xi|^{-M} .$$

(3) *Für $k \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq \vartheta \leq 1$, eine Konstante c_0 und $\xi \in C$ mit $|\xi| = c_0$ gilt mit*

$$\sigma^{(j)}(x,\xi) := \frac{\partial^j}{\partial x^j}\sigma(x,\xi)$$

die Integrabilitätsbedingung

$$\int_0^1\int_0^1 s^k\left|\sigma^{(k)}(\vartheta st, s\xi)\right| ds\,dt \leq C_k$$

mit einer Konstante C_k, die weder von ϑ noch von ξ abhängt.

Dann gilt für $z \to \infty$ in C die asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \sigma(x,xz)\,dx \sim_{\substack{|z|\to\infty\\ z\in C}} &\sum_{k=0}^\infty z^{-k-1}\int_0^\infty \frac{\xi^k}{k!}\sigma^{(k)}(0,\xi)\,d\xi\\ &+\sum_{k=0}^\infty\sum_{m=0}^{m_k}\int_0^\infty \sigma_{\alpha_k,m}(x)(xz)^{\alpha_k}(\log(xz))^m\,dx\\ &+\sum_{-\alpha_k\in\mathbb{N}}\sum_{m=0}^{m_k} z^{\alpha_k}\frac{(\log z)^{m+1}}{(m+1)(-\alpha_k-1)!}\sigma_{\alpha_k,m}^{(-\alpha_k-1)}(0),\end{aligned}$$

wobei es sich bei den beiden letzten Integralen um regularisierte Integrale im Sinne von [BS1], S. 135ff handelt.

1.4.2 Theorem: ([BL2], Theorem 1.2) *Betrachte $\mathbb{C}P^n$ mit einer hermiteschen Metrik h. M sei die Auflösung einer irreduziblen algebraische Kurve in $\mathbb{C}P^n$, versehen mit der von h induzierten singulären Metrik, die wir wiederum h nennen wollen. Den singulären Ort von M bezeichnen wir mit Σ.*

Für $t > 0$ ist der Wärmeleitungsoperator $e^{-t\Delta}$ auf Funktionen Spurklasse, und es gilt die asymptotische Entwicklung

$$\operatorname{tr}_{L^2(M)} e^{-t\Delta} \sim_{t\to 0+} \sum_{j\geq 0} a_j t^{j-1} + \sum_{j\geq 1} b_j t^{j-1}\log t + \sum_{\substack{p\in\Sigma\\ 1\leq i\leq L(p)}}\sum_{j\geq 0} c_j(i,p)\,t^{j/2N_i(p)}$$

mit geeigneten Koeffizienten a_j, b_j und $c_j(i,p)$. Es gilt

$$a_0 = \frac{\operatorname{vol}_h M}{4\pi}$$

und

$$b_1 = 0$$

sowie

$$\lim_{t\to 0+} \left(\mathrm{tr}_{L^2(M)}\, e^{-t\Delta} - a_0 t^{-1}\right) - \frac{1}{6}\,\chi_{(2)}\,(M) = \frac{1}{12} \sum_{\substack{p\in\Sigma \\ 1\le i\le L(p)}} \left(N_i\,(p) + N_i\,(p)^{-1} - 2\right).$$

$\chi_{(2)}$ *steht für die* L^2*–Eulercharakteristik, die durch*

$$\chi_{(2)}\,(M) := \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$$

mit

$$\beta_j := \dim\left(\ker\Delta \cap L^2\left(\bigwedge\nolimits^j TM\right)\right),$$

$j = 0, 1, 2$ *definiert ist.*

Es gibt Beispiele algebraischer Kurven, für die $b_2 \neq 0$ *ist, und es gibt Beispiele, so daß für gewisse* $p \in \Sigma$ *und* $1 \le i \le L\,(p)$ *der Koeffizient* $c_2\,(i,p)$ *nicht verschwindet.*

1.4.3 Korollar: *Sei* S *eine kompakte Riemannsche Fläche, versehen mit einer degenerierten Metrik* $g \in \mathcal{G}\,(S)$. *Dann ist* $e^{-t\Delta}$ *auf Funktionen Spurklasse, und es gilt*

$$\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} \sim_{t\to 0+} \sum_{j\ge 0} a_j t^{j-1} + \sum_{j\ge 1} b_j t^{j-1} \log t + \sum_{p\in\Sigma} \sum_{j\ge 0} c_j\,(p)\, t^{j/2N(p)} \tag{1.4.1}$$

mit geeigneten Koeffizienten a_j, b_j *und* $c_j\,(p)$. *Es gilt*

$$a_0 = \frac{\mathrm{vol}_g\, S}{4\pi}$$

und

$$b_1 = 0$$

sowie

$$\lim_{t\to 0+} \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - a_0 t^{-1}\right) - \frac{1}{6}\,\chi_{(2)}\,(S) = \frac{1}{12} \sum_{p\in\Sigma} \left(N\,(p) + N\,(p)^{-1} - 2\right).$$

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus Theorem 1.4.2, da in [BL2] ausschließlich die in Bemerkung 1.2.3 angegebene Struktur der Metrik benutzt wird und nicht die Tatsache, daß es sich um die Auflösung algebraischer Kurven handelt.

$\boxed{1.4.3}$

1.4.4 Lemma: *Sei S eine kompakte Riemannsche Fläche und $g \in \mathcal{G}(S)$. Für die Eulercharakteristik von S gilt*

$$\chi(S) = \chi_{(2)}(S).$$

Dabei ist $\chi_{(2)}(S)$ bezüglich g zu verstehen. Somit erhalten wir, daß $\chi_{(2)}$ unabhängig von g ist.

Beweis: Wir betrachten zunächst g mit nur einer Singularität. Wir betrachten eine offene Umgebung U um p. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß U homöomorph zu einer Kreisscheibe gewählt wurde. Mit der Mayer–Vietoris–Sequenz ([D], Satz und Definition 8.6, S. 48) erhalten wir

$$\chi(S) = \chi(S \setminus U) + \chi(U) - \chi\left(S^1\right).$$

Da U homöomorph zu einer Kreisscheibe ist, gilt

$$\chi(U) = 1.$$

Die Eulercharakteristik von S^1 ist 0. Damit folgt

$$\chi(S) = \chi(S \setminus U) + 1.$$

Gemäß Formel (4.10) und den darauf folgenden aus [BL2] gilt

$$\begin{aligned}\chi_{(2)}(S) &= \chi_{(2)}(S \setminus U) + \chi_{(2)}(U) - \chi_{(2)}\left(S^1\right)\\ &= \chi(S \setminus U) + 1.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Für allgemeine $g \in \mathcal{G}(S)$ folgt die Aussage völlig analog, wenn man

$$U = \bigcup_{p \in \Sigma} U_p$$

als eine Umgebung von Σ wählt, so daß jedes U_p eine zur Kreisscheibe homöomorphe Umgebung von p ist, und daß für $p \neq q$

$$U_p \cap U_q = \emptyset$$

gilt. Dann ist nämlich $\chi(U)$ gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von U. ∂U ist homöomorph zur disjunkten Vereinigung endlich vieler Kopien von S^1 und hat somit Eulercharakteristik 0.

$\boxed{1.4.4}$

1.4.5 Lemma: *Es sei S eine zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche, versehen mit einer degenerierten Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$ und singulärem Ort Σ. Dann gilt*

$$\lambda_j \sim_{j\to\infty} \frac{4\pi}{\mathrm{vol}_g S} \cdot j,$$

wobei

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

die Eigenwerte von $\Delta_0|\, L^2(S)$ sind.

Beweis: Diese Aussage kann mit dem Satz von Karamata ([Ta], S. 341, der Satz von Karamata ist ein Korollar aus dem Taubersatz von Hardy und Littlewood, [Wi], Theorem 20, S. 64 oder [Ta], Theorem 7.11, S. 339) aus Korollar 1.4.3 gefolgert werden. Sie ist auch in [L2], Korollar 2.4.3 nachzulesen.

Es ist zu beachten, daß S zusammenhängend angenommen wurde. Daher ist $\overset{\circ}{S}$ zusammenhängend, so daß der Kern des Laplaceoperators auf Funktionen eindimensional ist.

$\boxed{1.4.5}$

1.4.6 Satz: ([BL2], Lemma 2.3) *Sei S eine kompakte Riemannsche Fläche mit Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$. Wir betrachten*

$$Z_\delta := \{\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} |\ |\arg z| < \delta \}, \qquad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

und $\varphi \in C_0^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$. Dann existieren für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ asymptotische Entwicklungen

$$\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, \varphi \left(\Delta + z^2\right)^{-k} \sim_{\substack{|z|\to\infty \\ z \in Z_\delta}} \sum_{j=0}^{\infty} B_j^r(k;\varphi)\, z^{2-2(j+k)}$$

und

$$\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, \varphi e^{-t\Delta} \sim_{t\to 0+} \sum_{j=0}^{\infty} B_j^h(\varphi)\, t^{j-1}.$$

Mit

$$B_j^r(k;\varphi) =: \int_S B_j^r(k;p)\, \varphi(p)\, \mathrm{dvol}(p),$$

$$B_j^h(\varphi) =: \int_S B_j^h(p)\,\varphi(p)\,\mathrm{dvol}(p)\,,$$

wobei

$$B_j^h(p) = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+j-1)} B_j^r(k;p)$$

gilt, sind $B_j^r(k;p)$ und $B_j^h(p)$ glatte Funktionen in p.

Diese Überlegungen werden wir später in Abschnitt 2.1 benutzen, um die Asymptotik von

$$\mathrm{tr}_{L^2(S,g)}\left(\psi e^{-t\Delta}\right)$$

herzuleiten, die wiederum für die Berechnung der Polyakov–Formel gebraucht wird, da $\frac{\partial}{\partial\varphi}\det\Delta_\varphi$ bis auf einen skalaren Faktor dem konstanten Term von

$$\mathrm{tr}_{L^2(S,g)}\left(\psi\left(e^{-t\Delta} - \fint_\varphi\right)\right)$$

entspricht, wie wir in Satz 2.4.2 zeigen werden.

Das folgende Lemma ist einer Arbeit von J. Brüning und M. Lesch entnommen, die derzeit in Vorbereitung ist.

1.4.7 Lemma: *Sei T ein abgeschlossener Operator in einem Hilbertraum H. Es seien $f \in H$ und eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T)$ gegeben, so daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen f konvergiert und $\|Tf_n\|_H$ gleichmäßig beschränkt ist. Dann gilt $f \in \mathcal{D}(T)$, und $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen Tf.*

Beweis: Für alle $g \in \mathcal{D}(T^*)$ gilt

$$(Tf_n, g)_H = (f_n, T^*g)_H \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, T^*g)_H\,.$$

$\mathcal{D}(T^*) \subset H$ liegt dicht. $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also in einem dichten Unterraum von H schwach konvergent. Wegen

$$|(f, T^*g)_H| = \lim_{n\to\infty} |(Tf_n, g)_H| \le C \cdot \|g\|_H$$

mit einer von n und g unabhängigen Konstante C kann das Funktional

$$\begin{aligned} G : \mathcal{D}(T^*) &\to \mathbb{R} \\ g &\mapsto (f, T^*g)_H \end{aligned}$$

durch Stetigkeit auf ganz H fortgesetzt werden. Aufgrund des Satzes von Riesz gibt es ein $h \in H$, so daß für alle $g \in H$

$$G(g) = (h, g)_H$$

gilt. Für alle $g \in \mathcal{D}(T^*)$ gilt

$$G(g) = (h, g)_H = (f, T^* g)_H .$$

Da T abgeschlossen ist, gilt $T^{**} = T$, woraus wir $f \in \mathcal{D}(T)$ und $Tf = h$ erhalten.

$\boxed{1.4.7}$

1.4.8 Lemma: *Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m. P sei ein positiver selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator auf M der Ordnung $d > 0$. Q sei ein Differentialoperator auf M der Ordnung a. Für $z \in Z_\delta$, Z_δ wie in Satz 1.4.6 und $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{m+a}{d}$, bezeichnen wir den Integralkern von $(P + z^2)^{-n}$ mit $K_n(x, y, z)$, x, $y \in M$. Dann ist $QK_n(x, y, z)$ der Integralkern von $Q(P + z^2)^{-n}$, wobei hier Q auf der ersten Variable von K_n operiert. $QK_n(x, y, z)|_{x=y}$ hat eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$QK_n(x, y, z)|_{x=y} \sim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in Z_\delta}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \, z^{-2\left(n + \frac{k-m-a}{d}\right)}$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_k(x)$, die von m, n, P und Q abhängen. Für ungerade $k + a$ gilt $a_k(x) = 0$.

Beweis: Dieses Lemma kann bewiesen werden wie [Gi], Lemma 1.7.7.

$\boxed{1.4.8}$

Eine direkte Folgerung aus Lemma 1.4.8 ist das folgende Korollar.

1.4.9 Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.4.8 gilt*

$$\operatorname{tr}\left(Q\left(P + z^2\right)^{-n}\right) \sim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in Z_\delta}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, z^{-2\left(n + \frac{k-m-a}{d}\right)}$$

mit geeigneten Koeffizienten a_k, die von m, n, P und Q abhängen. Für ungerade $k + a$ gilt $a_k = 0$.

1.4.10 Lemma: *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es sei $k \in \mathbb{Z}_+$ und $f \in H^k_{loc}(M) \cap C^0(M)$ eine stetige Funktion im lokalen Sobolev–Raum der Ordnung k. Dann gilt $e^f \in H^k_{loc}(M)$.*

1.4.11 Bemerkung: Eine Einführung in die Theorie der Sobolev–Räume findet man in [Ta], Kapitel 1.

Beweis von Lemma 1.4.10: Sei $P \in \mathrm{Diff}_{\leq k}(M)$ ein Differentialoperator der Ordnung $\leq k$. Dann gilt

$$Pe^f = (Qf)\, e^f$$

mit einem geeigneten Differentialoperator $Q \in \mathrm{Diff}_{\leq k}(M)$. Wegen der Stetigkeit von f erhalten wir $e^f \in C^0(M)$. Aus $f \in H^k_{loc}(M)$ folgt $Qf \in L^2_{loc}(M)$. Zusammen gilt $Pe^f \in L^2_{loc}(M)$. Daraus folgt die Behauptung.

$\boxed{\text{1.4.10}}$

2 Die Polyakov–Formel

In [OPS] wird die ζ–regularisierte Determinante des Laplaceoperators auf geschlossenen Riemannschen Flächen mit glatter Riemannscher Metrik definiert. Anschließend wird untersucht, in welcher Form konforme Variationen der Metrik der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit diese Determinante transformieren. Das Ergebnis geht auf [P1] und [P2] zurück. Wir wollen diese Betrachtungen auf die in Abschnitt 1.2 eingeführten degenerierten Metriken verallgemeinern.

In diesem Kapitel sei grundsätzlich S eine zusammenhängende geschlossene Riemannsche Fläche, versehen mit einer degenerierten Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$. Der singuläre Ort von (S, g) wird mit Σ bezeichnet.

2.1 Lokale Betrachtungen einzelner Singularitäten

Analog zu [BL2], Abschnitt 2 zerlegen wir $\overset{\circ}{S}$ in

$$\overset{\circ}{S} =: S_1 \cup U,$$

wobei S_1 eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand

$$W := \partial S_1$$

und U eine offene Umgebung von Σ ist. Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U nimmt gemäß Bemerkung 1.2.3 die Metrik g auf einer Zusammenhangskomponente U_p von U in Polarkoordinaten

$$(x, \vartheta) \in (0, \varepsilon) \times S^1$$

die Gestalt

$$g(x, \vartheta) = \alpha^2 \left(x^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta \right) dx^2 + \beta^2 \left(x^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta \right) N(p)^2 \, x^2 d\vartheta^2$$

an. Mit

$$\widetilde{\alpha}(x, \vartheta) := \alpha \left(x^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta \right) \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\beta}(x, \vartheta) := \beta \left(x^{\frac{1}{N(p)}}, \vartheta \right)$$

gilt

$$\widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta}$$

(vgl. Bemerkung 1.2.3) und der Laplaceoperator auf Funktionen stellt sich in diesen Koordinaten dar als

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= -\left(x\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x} - N(p)^{-2}x^{-2}\left(\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\frac{\widetilde{\alpha}}{\widetilde{\beta}}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\\ &= \frac{1}{\widetilde{\alpha}^2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{N(p)^2x^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\right),\end{aligned}$$

als Operator auf $C_0^\infty\left((0,\varepsilon)\times S^1\right)$ im Hilbertraum

$$L^2\left(\mathbb{R}_+\times S^1, N(p)\,x\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\,dx\,d\vartheta\right).$$

Wir unterscheiden hier bewußt zwischen $\widetilde{\alpha}$ und $\widetilde{\beta}$, da für die folgenden Überlegungen die Gleichheit dieser beiden Funktionen nicht notwendig ist, und die Argumentation so in größerer Allgemeinheit durchgeführt werden kann.

Mit der unitären Transformation

$$\begin{aligned}\Phi : L^2\left(\mathbb{R}_+\times S^1\right) &\to L^2\left(\mathbb{R}_+\times S^1, N(p)\,x\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\,dx\,d\vartheta\right),\\ f &\mapsto \left(N(p)\,x\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}f\end{aligned}$$

erhalten wir den Operator

$$\tau_\varepsilon := \Phi^{-1}\Delta_0\Phi,$$

der auf $C_0^\infty\left((0,\varepsilon), C^\infty\left(S^1\right)\right)$ operiert. Gemäß [BL2], S. 28f gilt

$$\tau_\varepsilon = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + X^{-2}A_0 + R_\varepsilon,$$

wobei X die Multiplikation mit der Koordinatenfunktion x,

$$A_0 := -\frac{1}{N(p)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{4}$$

und

$$R_\varepsilon = \sum_{i,j=0}^{2} U_i^* C_{ij}^\varepsilon U_j$$

mit

$$
\begin{aligned}
U_0 &= \mathrm{id}_{L^2(S^1)}, \\
U_1 &= U_1(\gamma) = \Omega^\gamma X^{-1} (A_0 + 1)^{\frac{1}{2}}, \\
U_2 &= U_2(\gamma) = \Omega^\gamma \frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned}
$$

bezeichnet. Ω ist die Multiplikation mit $\frac{x}{x+1}$. $\gamma = \gamma(N(p))$ ist eine positive Zahl. C_{ij}^ε sind geeignete operatorwertige Funktionen in

$$C^0\left([0,\varepsilon), \mathcal{L}\left(L^2\left(S^1\right)\right)\right).$$

In [BL2], Abschnitt 3 wird gezeigt, daß R_ε — gegebenenfalls nach Verkleinerung von ε — mittels einer geeigneten Abschneidefunktion zu einem Operator im Hilbertraum

$$\mathcal{H} := L^2\left(\mathbb{R}_+, L^2\left(S^1\right)\right)$$

mit Definitionsbereich

$$\bigcap_{k \geq 1} C_0^\infty\left((0,\infty), \mathcal{D}\left(A_0^k\right)\right)$$

fortgesetzt werden kann. Diese Fortsetzung heißt wiederum R_ε, und wir bezeichnen die zugehörige Fortsetzung von τ_ε wieder mit τ_ε. Sei U_s für $s \in [0,1]$ durch

$$U_s v(x) := s^{\frac{1}{2}} v(sx)$$

definiert. Dann führen wir die skalierte Familie $T_{\varepsilon,s}$, $s \in [0,1]$ als die Friedrichsfortsetzung von

$$\tau_{\varepsilon,s} := s^2 U_s \tau_\varepsilon U_s^*$$

in $\mathcal{H}$ ein. Für $z \in Z_\delta$, mit Z_δ wie in Satz 1.4.6 und $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$G_{\varepsilon,s}^k(z) := \left(T_{\varepsilon,s} + z^2\right)^{-k}. \tag{2.1.1}$$

Wie in [BL2], S. 34 gezeigt wird, hat $G_{\varepsilon,s}^k(z)$ für $k \geq 3$ und x, $y > 0$ einen stetigen Integralkern

$$G_{\varepsilon,s}^k(z;x,y) \in C_1\left(L^2\left(S^1\right)\right), \tag{2.1.2}$$

und es gilt für $s > 0$

$$G_{\varepsilon,1}^k(z;x,y) = s^{2k-1} G_{\varepsilon,s}^k\left(sz; \frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right).$$

$C_1\left(L^2\left(S^1\right)\right)$ bezeichnet die Spurklasseoperatoren auf $L^2\left(S^1\right)$. Gemäß [BL2], Formel (2.38) hat $\operatorname{tr}_{L^2(S^1)} G^k_{\varepsilon, x^{N(p)}}\left(z^{N(p)}; 1, 1\right)$ für $z \in Z_{\delta/N(p)}$, $x \in \mathbb{R}_+$ eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\operatorname{tr}_{L^2(S^1)} G^k_{\varepsilon, x^{N(p)}}\left(z^{N(p)}; 1, 1\right) \underset{\substack{|z|\to\infty \\ z\in Z_{\delta/N(p)}}}{\sim} \sum_{j=0}^{\infty} \widetilde{a}_j\left(x\right) z^{N(p)(2-2j-2k)}. \qquad (2.1.3)$$

Diese Überlegungen werden in Abschnitt 2.4 zur Herleitung der Polyakov–Formel wieder aufgegriffen werden. Unter anderem werden wir sie benutzen, um die Anwendbarkeit des SAL auf eine für die weiteren Überlegungen wesentliche Funktion zu zeigen.

2.2 Die ζ–regularisierte Determinante des Laplaceoperators

Wir kehren nun zurück zur Betrachtung von ganz S. Wie in Lemma 1.4.5 bezeichnen wir mit

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

die Eigenwerte von Δ_0 als Operator auf Funktionen.

Wegen Lemma 1.4.5 gilt für ein komplexes s mit $\operatorname{Re} s > 1$, daß

$$\zeta\left(s\right) := \sum_{j\geq 1} \lambda_j^{-s}$$

existiert und holomorph ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\zeta\left(s\right) &= \sum_{j\geq 1} \lambda_j^{-s} \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(s\right)} \sum_{j\geq 1} \int_0^{\infty} e^{-t\lambda_j} t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(s\right)} \int_0^{\infty} \sum_{j\geq 1} e^{-t\lambda_j} t^{s-1} dt \qquad (2.2.1) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(s\right)} \int_0^{\infty} \left(\operatorname{tr}_{L^2(S)} e^{-t\Delta} - 1\right) t^{s-1} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(s\right)} \int_0^{\infty} \operatorname{tr}_{L^2(S)} \left(e^{-t\Delta} - f\right) t^{s-1} dt.
\end{aligned}$$

$⨍$ steht für den Mittelungsoperator

$$⨍ f := \frac{1}{\mathrm{vol}_g S} \int_S f \, \mathrm{dvol}_g$$

für $f \in L^1(S)$. $⨍$ ist ein Integraloperator mit konstantem Integralkern $(\mathrm{vol}_g S)^{-1}$ und hat Spur 1. Die dritte Gleichheit in Formel (2.2.1) begründet sich dadurch, daß für $s \in \mathbb{R}$ der Integrationsterm nichtnegativ ist, woraus mit dem Satz von Beppo–Levi folgt, daß Summenbildung und Integral vertauschen. Aufgrund des Identitätssatzes folgt die Vertauschbarkeit dann auch für alle anderen s, weil

$$\int_0^\infty \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{s-1} dt \tag{2.2.2}$$

holomorph ist, was sich wie folgt begründet. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left| \frac{d}{ds} \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{s-1} \right| dt \\
&= \int_0^\infty \left| \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{s-1} \log t \right| dt \\
&= \int_0^\infty \underbrace{\left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right)}_{\geq 0} t^{\mathrm{Re}\, s - 1} \left|\log t\right| \, dt \\
&\leq - \int_0^1 \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{\mathrm{Re}\, s - 1} \log t \, dt + \int_1^\infty \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{\mathrm{Re}\, s} dt \\
&= - \int_0^1 \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{\frac{\mathrm{Re}\, s - 1}{2}} \underbrace{t^{\frac{\mathrm{Re}\, s - 1}{2}} \log t}_{\text{beschränkt}} \, dt \\
&\qquad\qquad + \int_1^\infty \left(\mathrm{tr}_{L^2(S)}\, e^{-t\Delta} - 1\right) t^{\mathrm{Re}\, s} dt < \infty
\end{aligned}$$

gemäß Formel (2.2.1). Weiterhin gilt für $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, s \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$,

$s_0 > 1$

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{ds} \left(\operatorname{tr}_{L^2(S)} e^{-t\Delta} - 1 \right) t^{s-1} \right| \\ &\le \left(\operatorname{tr}_{L^2(S)} e^{-t\Delta} - 1 \right) \\ &\quad \cdot \left(1\!\!1_{[0,1)}(t)\, t^{\frac{s_0-\varepsilon-1}{2}} \sup_{u \in (-\varepsilon,\varepsilon)} \left| t^{\frac{s_0+u-1}{2}} \log t \right| + 1\!\!1_{[1,\infty)}(t)\, t^{s_0+\varepsilon} \right) \in L^1(\mathbb{R}_+). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit [Fo3], S. 99, Satz 2 die Holomorphie des Ausdrucks in Formel (2.2.2).

Gemäß [BL2], Formel (2.7) gilt mit Lemma 1.4.5 für $n \ge 3$ und $\operatorname{Re} s > n$

$$\binom{n-1-s}{n-1} \zeta(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_1^\infty z^{n-1-s} \operatorname{tr}(\Delta + z)^{-n} dz + \widetilde{\zeta}(s)$$

mit einer ganzen Funktion $\widetilde{\zeta}$. Daraus kann man [BL2], Lemma 2.1 folgern, das in Verbindung mit [BL2], Formel (2.22) besagt, daß ζ meromorph auf $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

2.2.1 Satz: *ζ ist bei 0 analytisch.*

Beweis: Da Δ ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung ist, ist der zugehörige Wärmeleitungsoperator $e^{-t\Delta}$ für positive t ein Glättungsoperator mit C^∞–Integralkern $e^{-t\Delta}(\,.\,,\,.\,)$.

Für $\operatorname{Re} s > 1$ und beliebig großes L gilt gemäß Formel (2.2.1) und Korollar 1.4.3

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \operatorname{tr}_{L^2(S)} \left(e^{-t\Delta} - f \right) t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_1^\infty \operatorname{tr}_{L^2(S)} \left(e^{-t\Delta} - f \right) t^{s-1} dt + \int_0^1 \operatorname{tr}_{L^2(S)} \left(e^{-t\Delta} - f \right) t^{s-1} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\int_1^\infty \operatorname{tr}_{L^2(S)} \left(e^{-t\Delta} - f \right) t^{s-1} dt + \sum_{j=0}^{\widetilde{L}} \frac{a_j}{s+j-1} \right. \\ &\qquad - \sum_{j=2}^{\widetilde{L}} \frac{b_j}{(s+j-1)^2} + \sum_{p \in \Sigma_g} \sum_{j=0}^{\widetilde{L}} \frac{c_j(p)}{s + j/2N(p)} - \frac{1}{s} \\ &\qquad \left. + \int_0^1 t^{s-1} f(t)\, dt \right) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

mit

$$f \in L^1([0,1]), \quad f(t) = O\left(t^L\right)$$

für hinreichend großes $\widetilde{L}$, das von L abhängt. Auch f hängt von L ab.

$$\int_0^1 t^{s-1} f(t)\, dt$$

existiert und ist gemäß [Fo3], S. 99, Satz 2 analytisch, weil

$$t^{s-1} \log t\, f(t) \in L^1([0,1]).$$

Mit Lemma 1.4.5 und geeigneten Konstanten C_1, C_2, sowie $\alpha = \frac{4\pi}{\mathrm{vol}_g S}$ gilt für jedes $s \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_1^\infty \mathrm{tr}_{L^2(S)}\left(e^{-t\Delta} - f\right) t^{s-1} dt\right| \\
&= \left|\int_1^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{-t\lambda_j} t^{s-1} dt\right| \\
&\leq \int_1^\infty \sum_{j=1}^\infty e^{-t\lambda_j} t^{\mathrm{Re}\, s-1} dt \\
&\leq C_1 \int_1^\infty \int_{C_2}^\infty e^{-t\alpha x} dx\, t^{\mathrm{Re}\, s-1} dt \\
&= C_1 \int_1^\infty t^{\mathrm{Re}\, s-2} \frac{1}{\alpha} e^{-C_2 \alpha t} dt < \infty.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\int_1^\infty \mathrm{tr}_{L^2(S)}\left(e^{-t\Delta} - f\right) t^{s-1} dt$$

eine ganze Funktion. Deshalb ist der letzte Ausdruck von Formel (2.2.3) insbesondere für diejenigen $s \in \mathbb{C}$ definiert, für die keiner der Nenner verschwindet. ζ ist aufgrund der meromorphen Fortsetzbarkeit bei allen solchen s holomorph. Es gilt

$$\lim_{s \to 0} \zeta(s) = a_1 + \sum_{p \in \Sigma_g} c_0(p) - 1 \in \mathbb{C}.$$

Daher ist ζ bei $s = 0$ analytisch.

$\boxed{2.2.1}$

2.2.2 Bemerkung: Im Beweis von Satz 2.2.1 wurde implizit auch gezeigt, daß ζ meromorph auf $\mathbb{C}$ fortsetzbar ist.

2.2.3 Definition: *Die ζ–regularisierte Determinante von Δ wird durch*

$$\det \Delta := e^{-\zeta'(0)}$$

definiert. Wegen Satz 2.2.1 ist diese Definition sinnvoll.

2.3 Variation der Metrik

Sei $\varphi \in C^\infty(S)$ gegeben. Durch φ wird auf $\overset{\circ}{S}$ (oder präziser auf $T\overset{\circ}{S}$, dem Tangentialbündel von $\overset{\circ}{S}$) eine neue Metrik g_φ durch

$$g_\varphi = e^{2\varphi} g$$

induziert. Aus Lemma 1.2.4 folgt

$$g_\varphi \in \mathcal{G}(S) . \tag{2.3.1}$$

Wenn wir über die Variation der Metrik $g = g_0$ sprechen, beziehen sich Ausdrücke mit einem Index 0 grundsätzlich auf die Metrik g. Wenn g_φ gemeint ist, stellen wir den Index φ bei. Bei metrikabhängigen Ausdrücken, in denen nur eine Metrik auftritt und die sowohl für g als auch für g_φ richtig sind, wird der entsprechende Index weggelassen.

Für $i = 0, 1, 2$ sei $\omega_i \in C^\infty\left(\bigwedge^i T^*\overset{\circ}{S}\right)$ eine glatte i–Form auf $\overset{\circ}{S}$. Dann transformiert sich der Hodgeoperator wie folgt:

$$\begin{aligned} *_\varphi\omega_0 &= e^{2\varphi} *_0 \omega_0, \\ *_\varphi\omega_1 &= *_0 \omega_1, \\ *_\varphi\omega_2 &= e^{-2\varphi} *_0 \omega_2. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Demnach gilt

$$\mathrm{dvol}_\varphi = *_\varphi 1 = e^{2\varphi} *_0 1 = e^{2\varphi}\,\mathrm{dvol}_0 . \tag{2.3.3}$$

Da es auf $\overset{\circ}{S}$ eine eindeutige ideale Randbedingung D der äußeren Ableitung d gibt, also

$$d_{max} = d_{min}$$

gilt, wie Definition und Theorem 1.2.9 aussagt, ist D unabhängig von der zugrundeliegenden Metrik. Es ergibt sich für den Laplaceoperator auf Funktionen

$$\Delta_\varphi = - *_\varphi D *_\varphi D = -e^{-2\varphi} *_0 D *_0 D = e^{-2\varphi}\Delta_0. \tag{2.3.4}$$

Gemäß [KW], Formel (1.3), S. 15 transformiert sich bei Übergang von g_0 zu g_φ die Krümmung von $\overset{\circ}{S}$ durch

$$K_\varphi = e^{-2\varphi}\left(K_0 + \Delta_0 \varphi\right). \tag{2.3.5}$$

Zwar liegt φ im allgemeinen nicht in $\mathcal{D}\left(\Delta_0\right)$, wegen der Glattheit von φ kann aber Δ_0 als lokaler Operator auf φ angewandt werden. Die Multiplizitäten sind gemäß Lemma 1.2.4 invariant unter konformer Variation von g mit $e^{2\varphi}$, da $e^{2\varphi}$ wegen der Kompaktheit von S von 0 weg beschränkt ist.

2.3.1 Bemerkung: Die Formeln (2.3.2) bis (2.3.3) sowie Formel (2.3.5) gelten auch für $\varphi \in C^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$, da es sich um lokale Ausdrücke auf $\overset{\circ}{S}$ handelt. Formel (2.3.4) kann für $\varphi \in C^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$ folgendermaßen abgewandelt werden: Für $f \in C_0^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$ gilt

$$\Delta_\varphi f = e^{-2\varphi}\Delta_0 f.$$

Diese Änderung ist notwendig, weil $e^{-2\varphi}$ im allgemeinen keine $L^2\left(S\right)$–Funktion ist. Falls aber $e^{-2\varphi} \in L^2\left(S\right)$ gilt, so ist Formel (2.3.4) auch in diesem Fall richtig.

2.3.2 Satz: *Für positives $t \in \mathbb{R}$ und $\psi \in C^\infty\left(S\right)$ gilt*

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(e^{-t\Delta_{\varphi+\varepsilon\psi}}\right) = 2t\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\Delta_\varphi e^{-t\Delta_\varphi}\right).$$

Beweis: Wir bezeichnen den Laplaceoperator bezüglich der von $\varphi + \varepsilon\psi$ induzierten Metrik $e^{2(\varphi+\varepsilon\psi)}g$ mit Δ_ε. Dann gilt

$$\Delta_\varepsilon = e^{-2\varepsilon\psi}\Delta_\varphi.$$

Folglich ist

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Delta_\varepsilon = -2\psi\Delta_\varepsilon.$$

Mit

$$H_\varepsilon\left(t\right) := e^{-t\Delta_\varepsilon}$$

gilt

$$\left(\frac{d}{dt} + \Delta_\varepsilon\right) H_\varepsilon(t) = 0.$$

Wir erhalten mit dem Satz von Schwarz

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\frac{d}{dt} + \Delta_\varepsilon\right) H_\varepsilon(t)\right) = \frac{d}{dt}\frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon(t) - 2\psi\Delta_\varepsilon H_\varepsilon(t) + \Delta_\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon(t),$$

woraus

$$\left(\frac{d}{dt} + \Delta_\varepsilon\right)\left(\frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon(t)\right) = 2\psi\Delta_\varepsilon H_\varepsilon(t)$$

folgt. Mit

$$P_\varepsilon(t) := 2\int\limits_0^t e^{-(t-s)\Delta_\varepsilon}\psi\Delta_\varepsilon e^{-s\Delta_\varepsilon} ds$$

gilt

$$\left(\frac{d}{dt} + \Delta_\varepsilon\right) P_\varepsilon(t) = 2\psi\Delta_\varepsilon H_\varepsilon(t).$$

Für $f \in L^2(S)$ gilt daher, daß sowohl $u_t := P_\varepsilon(t) f$, als auch $v_t := \frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon(t) f$ Lösungen der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{d}{dt} + \Delta_\varepsilon\right) w_t = 2\psi\Delta_\varepsilon H_\varepsilon(t) f$$

sind. Es gilt $v_0 = 0$. Wir wollen zeigen, daß der Operator $\Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\psi\Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ beschränkt ist. Für $f \in \ker\Delta_\varepsilon$ gilt

$$\Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\psi\Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} f = 0.$$

Für $f \perp_{g_\varphi} \ker\Delta_\varepsilon$, $\Delta_\varepsilon f = \lambda f$, $\lambda > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\psi\Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} f\right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
&= \lambda^{-\frac{1}{2}}\left\|\Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\psi f\right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
&\leq \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\|D\psi\|_{L^\infty} + \|\psi\|_{L^\infty}\right)\|f\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
&\leq \left(\lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|D\psi\|_{L^\infty} + \|\psi\|_{L^\infty}\right)\|f\|_{L^2(S,g_\varphi)},
\end{aligned}$$

wobei λ_1 den kleinsten nicht verschwindenden Eigenwert von $\Delta_\varepsilon | L^2(S)$ bezeichnet. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\left\| \Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \psi \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
=&\left\| \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \psi \Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
\leq&\, \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \left\| D\psi \right\|_{L^\infty} + \left\| \psi \right\|_{L^\infty} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit gilt für $f \in L^2(S)$

$$\begin{aligned}
&\left\| P_\varepsilon(t) f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
\leq& 2 \int_0^t \left\| e^{-(t-s)\Delta_\varepsilon} \psi \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-s\Delta_\varepsilon} f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} ds \\
\leq& 2 \int_0^t \left\| e^{-(t-s)\Delta_\varepsilon} \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \psi \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \left\| \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-s\Delta_\varepsilon} f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} ds \\
\leq& 2 \int_0^t \left\| \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)\Delta_\varepsilon} \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \left\| \Delta_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \psi \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \left\| \Delta_\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-s\Delta_\varepsilon} f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} ds \\
\leq& \left(\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \left\| D\psi \right\|_{L^\infty} + \left\| \psi \right\|_{L^\infty} \right) e^{-1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds \left\| f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
=& \pi e^{-1} \left(\lambda_1^{-\frac{1}{2}} \left\| D\psi \right\|_{L^\infty} + \left\| \psi \right\|_{L^\infty} \right) \left\| f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)}.
\end{aligned}$$

Daher ist $P_\varepsilon(t)$ beschränkt. Für $f \in \mathcal{D}(\Delta_\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| P_\varepsilon(t) f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} \\
\leq& 2 \int_0^t \left\| \psi \right\|_{L^\infty} \left\| e^{-s\Delta_\varepsilon} \Delta_\varepsilon f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} ds \\
\leq& 2t \left\| \psi \right\|_{L^\infty} \left\| \Delta_\varepsilon f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)}
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\lim_{t \to 0} \left\| P_\varepsilon(t) f \right\|_{L^2(S,g_\varphi)} = 0. \tag{2.3.6}$$

Da $\mathcal{D}(\Delta_\varepsilon) \subset L^2(S)$ dicht liegt, folgt zusammen mit der Beschränktheit von $P_\varepsilon(t)$, daß Formel (2.3.6) für alle $f \in L^2(S)$ erfüllt ist. Daraus erhalten wir $u_0 = 0$. Daher ist

$$w_t := u_t - v_t$$

eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung

$$\left(\frac{d}{dt} + \Delta_\varepsilon\right) w_t = 0,$$

und es gilt $w_0 = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left\|w_t\right\|^2_{L^2(S,g_\varphi)} &= \left(-\Delta_\varepsilon w_t, w_t\right)_\varphi + \left(w_t, -\Delta_\varepsilon w_t\right)_\varphi \\ &= -2\left(\Delta_\varepsilon w_t, w_t\right)_\varphi \leq 0,\end{aligned}$$

weil Δ_ε ein positiver Operator ist. Folglich ist $\left\|w_t\right\|_{L^2(S,g_\varphi)}$ monoton fallend bezüglich t. Wegen $w_0 = 0$ erhalten wir $w_t = 0$ für alle $t \geq 0$. Daher gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon(t) = P_\varepsilon(t).$$

Daraus folgt mit [Fo2], S. 84, Satz 2 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} H_\varepsilon(t) &= \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon(t)\right) \\ &= \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(2\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\varphi}\psi\Delta_\varphi e^{-s\Delta_\varphi}\,ds\right) \\ &= 2\int_0^t \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(e^{-(t-s)\Delta_\varphi}\psi\Delta_\varphi e^{-s\Delta_\varphi}\right) ds \\ &= 2\int_0^t \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\Delta_\varphi e^{-t\Delta_\varphi}\right) ds \\ &= 2t\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\Delta_\varphi e^{-t\Delta_\varphi}\right).\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus [RS1], Theorem 6.25, da $e^{-(t-s)\Delta_\varphi}$ für $s \leq t$ beschränkt und $\psi\Delta_\varphi e^{-s\Delta_\varphi}$ für $s > 0$ aufgrund von Lemma 1.4.5 Spurklasse ist. Wenn nämlich

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$$

die Eigenwerte von $\Delta_\varphi|\,L^2(S)$ bezeichnen, gilt mit Konstanten C_1, C_2 sowie

$\alpha = \frac{4\pi}{\operatorname{vol}_g S}$

$$\begin{aligned}\left\|\psi \Delta_\varphi e^{-s\Delta_\varphi}\right\|_{\mathrm{tr}} &\leq \|\psi\|_{L^\infty} \left\|\Delta_\varphi e^{-s\Delta_\varphi}\right\|_{\mathrm{tr}} \\ &= \|\psi\|_{L^\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i e^{-s\lambda_i} \\ &\leq C_1 \|\psi\|_{L^\infty} \int_{C_2}^{\infty} \alpha x e^{-\alpha s x} dx \\ &= C_1 \|\psi\|_{L^\infty} \frac{1 + C_2 \alpha s}{\alpha s^2} e^{-C_2 \alpha s} < \infty.\end{aligned}$$

$\| \,.\, \|_{\mathrm{tr}}$ bezeichnet die Spurnorm.

$\boxed{2.3.2}$

2.3.3 Lemma: *Für alle $p \in \mathring{S}$ und $t > 0$ gilt für den Integralkern von $e^{-t\Delta} - ⨍$*

$$e^{-t\Delta}(p,p) - \frac{1}{\operatorname{vol} S} \geq 0.$$

Beweis: Sei $(e_i)_{i \geq 0}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(S)$ aus Eigenfunktionen von Δ, so daß e_0 konstant ist. Dann gilt

$$⨍ e_i = \begin{cases} e_0 & \text{für } i = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} e^{-t\Delta}(e_0) &= e_0, \\ \left(e^{-t\Delta}(e_i), e_i\right) &> 0 \qquad \text{für} \quad i \geq 1. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Für $i \neq j$ gilt

$$\left(e^{-t\Delta}(e_i), e_j\right) = 0.$$

Daher ist $e^{-t\Delta} - ⨍$ ein positiver selbstadjungierter Operator. Mit

$$\lambda_i e_i := \left(e^{-t\Delta} - ⨍\right) e_i$$

gilt $\lambda_i \geq 0$ und

$$e^{-t\Delta}(x,y) - \frac{1}{\operatorname{vol} S} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \overline{e_i(x)} e_i(y),$$

woraus folgt, daß der Integralkern auf der Diagonale nichtnegativ ist,

$$e^{-t\Delta}(x,x) - \frac{1}{\operatorname{vol} S} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \left|e_i(x)\right|^2 \geq 0.$$

$\boxed{2.3.3}$

Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ und sei $\psi \in C^{\infty}(S)$. Dann gilt mit den Formeln (2.2.1) und (2.3.7), Satz 2.3.2 sowie [Fo3], S. 99, Satz 2 und Korollar 1.4.3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\varphi}\zeta_{\varphi}(s)(\psi) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} e^{-t\Delta_\varphi} - 1\right)(\psi)\, t^{s-1} dt \\
&= \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi \Delta_\varphi e^{-t\Delta_\varphi}\right) t^s dt \\
&= -\frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dt} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi} - f_\varphi\right)\right)\right) t^s dt \\
&= -\frac{2}{\Gamma(s)} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi} - f_\varphi\right)\right) t^s \Big|_{t=0}^{\infty} \\
&\quad + \frac{2}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi} - f_\varphi\right)\right) s\, t^{s-1} dt \\
&= \frac{2s}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi} - f_\varphi\right)\right) t^{s-1} dt,
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

was mit Lemma 2.3.3 aufgrund von

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left| \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi \left(e^{-t\Delta_\varphi} - \fint_\varphi \right) \right) t^{s-1} \right| dt \\
&\leq \int_0^\infty \int_S \left| \psi(x) \underbrace{\left(e^{-t\Delta_\varphi}(x,x) - \frac{1}{\operatorname{vol}_\varphi S} \right)}_{\geq 0} t^{s-1} \right| \operatorname{dvol}_\varphi(x)\, dt \\
&\leq \|\psi\|_{L^\infty} \int_0^\infty \int_S \left| \left(e^{-t\Delta_\varphi}(x,x) - \frac{1}{\operatorname{vol}_\varphi S} \right) t^{s-1} \right| \operatorname{dvol}_\varphi(x)\, dt \\
&= \|\psi\|_{L^\infty} \int_0^\infty \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(e^{-t\Delta_\varphi} - \fint_\varphi \right) t^{\operatorname{Re} s - 1} dt \\
&= \|\psi\|_{L^\infty} \Gamma(\operatorname{Re} s)\, \zeta_\varphi(\operatorname{Re} s)
\end{aligned}
\tag{2.3.9}
$$

existiert. $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ ist als Frechet–Ableitung zu verstehen,

$$
\frac{\partial}{\partial\varphi} \zeta_\varphi(s)(\psi) := \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \zeta_{\varphi+\varepsilon\psi}(s).
$$

Die letzte Gleichheit in Formel (2.3.9) kann man mit Hilfe von Formel (2.2.1) sehen. Daß der Term

$$
-\frac{2}{\Gamma(s)} \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi \left(e^{-t\Delta_\varphi} - \fint_\varphi \right) \right) t^s \Big|_{t=0}^{\infty}
$$

in Formel (2.3.8) verschwindet, begründet sich wie folgt. Für $t \to \infty$ gilt wegen Lemma 1.4.5

$$
\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi \left(e^{-t\Delta_\varphi} - \fint_\varphi \right) \right) t^s \to 0,
$$

weil mit von t unabhängigen Konstanten C_1, C_2 sowie $\alpha = \frac{4\pi}{\operatorname{vol}_g S}$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\left| \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} \left(\psi \left(e^{-t\Delta_\varphi} - \fint_\varphi \right) \right) t^s \right| \\
&\leq \|\psi\|_{L^\infty} t^{\operatorname{Re} s} \left\| e^{-t\Delta_\varphi} - \fint_\varphi \right\|_{\operatorname{tr}} \\
&= \|\psi\|_{L^\infty} t^{\operatorname{Re} s} \sum_{i=1}^\infty e^{-t\lambda_i} \\
&\leq C_1 \|\psi\|_{L^\infty} t^{\operatorname{Re} s} \int_{C_2}^\infty e^{-\alpha t x} dx \\
&= C_1 \|\psi\|_{L^\infty} t^{\operatorname{Re} s - 1} \frac{1}{\alpha} e^{-C_2 \alpha t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

Für $t \to 0$ gilt mit Korollar 1.4.3 wegen $\operatorname{Re} s > 1$ analog der Argumentation von Formel (2.3.9)

$$\begin{aligned}&\left|\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi} - f_\varphi\right)\right)t^s\right|\\ \leq &\left\|\psi\right\|_{L^\infty}\left|\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)} e^{-t\Delta_\varphi} - 1\right| t^{\operatorname{Re} s} = O\left(t^{\operatorname{Re} s-1}\right) \to 0.\end{aligned}$$

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß $\frac{\partial}{\partial\varphi}\zeta_\varphi(s)(\psi)$ meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

2.4 Herleitung der Polyakov–Formel

Wir betrachten zunächst eine Metrik g mit nur einer Singularität der Multiplizität N bei p. Wir betrachten U_p wie auf S. 41.

Sei $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\mu = 1$ in einer Umgebung von 0. In den Lemmata 2.5, 2.6 und 2.7 von [BL2] wird gezeigt, daß sich für $k \geq 3$ das Singular Asymptotics Lemma 1.4.1 auf die Funktion

$$f(y,\zeta) := N y^{2kN-1}\mu\left(y^N\right)\operatorname{tr}_{L^2(S^1)}\left(G^k_{\varepsilon,y^N}\left(\zeta^N;1,1\right)\right)$$

$y \in \mathbb{R}_+$, $\zeta \in Z_{\delta/N}$, $Z_{\delta/N}$ wie in Satz 1.4.6, anwenden läßt. Dabei ist G^k_{ε,y^N} wie in Formel (2.1.1) zu verstehen. Mit $\psi \in C^\infty(S)$ sind sowohl ψ als auch alle seine Ableitungen beschränkt. Alle Voraussetzungen des SAL außer Bedingung 2 für die Funktion

$$\widetilde{f}(y,\zeta) := N y^{2kN-1}\mu\left(y^N\right)\operatorname{tr}_{L^2(S^1)}\left(\psi\left(y^N,.\right)G^k_{\varepsilon,y^N}\left(\zeta^N;1,1\right)\right)$$

folgen aus dieser Eigenschaft, wenn man berücksichtigt, daß die Anwendbarkeit des SAL auf f bereits gezeigt ist. Wegen der Wohldefiniertheit von $\frac{\partial}{\partial y}f(y,\zeta)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{f}(y,\zeta) =& N(2kN-1)\,y^{2kN-2}\mu\left(y^N\right)\operatorname{tr}_{L^2(S^1)}\left(\psi\left(y^N,.\right)G^k_{\varepsilon,y^N}\left(\zeta^N;1,1\right)\right)\\ &+ N y^{2kN-1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(y^N\right)\right)\operatorname{tr}_{L^2(S^1)}\left(\psi\left(y^N,.\right)G^k_{\varepsilon,y^N}\left(\zeta^N;1,1\right)\right)\\ &+ N y^{2kN-1}\mu\left(y^N\right)\operatorname{tr}_{L^2(S^1)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\psi\left(y^N,.\right)\right)G^k_{\varepsilon,y^N}\left(\zeta^N;1,1\right)\right)\\ &+ N y^{2kN-1}\mu\left(y^N\right)\operatorname{tr}_{L^2(S^1)}\left(\psi\left(y^N,.\right)\frac{\partial}{\partial y}G^k_{\varepsilon,y^N}\left(\zeta^N;1,1\right)\right).\end{aligned}$$

Sowohl ψ, als auch $\frac{\partial}{\partial y}\psi$ sind glatt und beschränkt. Daher ist $\frac{\partial}{\partial y}\widetilde{f}(y,\zeta)$ wohldefiniert und analytisch in C. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen. Bedingung 1 des SAL wird somit von $\widetilde{f}$ erfüllt. Wegen der Beschränktheit von ψ und aller seiner Ableitungen gibt es zu $k \in \mathbb{Z}_+$ Konstanten $\widetilde{C}_n$, die nicht von ϑ und ζ abhängt, so daß für $0 \leq \vartheta \leq 1$, eine Konstante c_0 und $\zeta \in C$ mit $|\zeta| = c_0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 s^k \left|\widetilde{f}^{(k)}(\vartheta st, s\zeta)\right| ds\, dt &\leq \sum_{n=0}^{k} \widetilde{C}_n \int_0^1 \int_0^1 s^k \left|f^{(k)}(\vartheta st, s\zeta)\right| ds\, dt \\ &\leq \sum_{n=0}^{k} \widetilde{C}_n C_n\end{aligned}$$

mit C_n wie im SAL. Daher erfüllt $\widetilde{f}$ die dritte Bedingung des SAL. Zum Beweis von Bedingung 2 orientieren wir uns am Beweis von [BS2], Theorem 4.3. Entsprechend der dortigen Argumentation können wir für beliebig großes L und $k \geq 3$

$$\begin{aligned}&y^{N(2k-1)} \operatorname{tr}_{L^2(S^1)} \left(\psi\left(y^N, .\right) G^k_{\varepsilon, y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right)\right) \\ =\, &y^{N(2k-1)} \operatorname{tr}_{L^2(S^1)} \left(\psi\left(y^N, .\right) K^k_{i, y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right)\right) + O\left(|\zeta|^{-L}\right)\end{aligned}$$

mit einer geeigneten und von L abhängigen Parametrix $K^k_{i,y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right) \in C_1\left(L^2\left(S^1\right)\right)$ schließen. $C_1\left(L^2\left(S^1\right)\right)$ steht für die Spurklasseoperatoren auf $L^2\left(S^1\right)$. Entsprechendes gilt auch für alle Ableitungen $\frac{\partial^j}{\partial \zeta^j} \widetilde{f}(y, \zeta)$, $j \in \mathbb{N}$, wie in [BS2] ausgeführt wird. Wie aus [BS2] ersichtlich ist, ist die Parametrix $K^k_{i,y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right)$ von der Gestalt $Q\left(P + \zeta^{2N}\right)^{-k}$ wobei P und Q Differentialoperatoren sind, $\operatorname{ord} P = 2$ gilt, $\operatorname{ord} Q$ gerade und kleiner oder gleich $\frac{k}{2}$ ist und P positiv, selbstadjungiert und elliptisch ist. Daher folgt aus Korollar 1.4.9, daß

$$\operatorname{tr}_{L^2(S^1)} \left(\psi\left(y^N, .\right) K^k_{i, y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right)\right) = \operatorname{tr}_{L^2(S^1)} \left(\psi\left(y^N, .\right) Q\left(P + \zeta^{2N}\right)^{-k}\right)$$

für $|\zeta| \to \infty$, $\zeta \in Z_{\delta/N}$, $Z_{\delta/N}$ wie in Satz 1.4.6, eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\operatorname{tr}_{L^2(S^1)} \left(\psi\left(y^N, .\right) K^k_{i, y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right)\right) \sim_{\substack{|\zeta| \to \infty \\ \zeta \in Z_{\delta/N}}} \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{a}_l(\psi)(y)\, \zeta^{2N(1-l-k)}$$

besitzt. Daraus folgt die Existenz einer Asymptotik

$$\operatorname{tr}_{L^2(S^1)} \left(\psi\left(y^N, .\right) G^k_{\varepsilon, y^N}\left(\zeta^N; 1, 1\right)\right) \sim_{\substack{|\zeta| \to \infty \\ \zeta \in Z_{\delta/N}}} \sum_{l=0}^{\infty} \widetilde{a}_l(\psi)(y)\, \zeta^{2N(1-l-k)}$$

analog zu Formel (2.1.3). Folglich läßt sich das SAL auf $\widetilde{f}$ anwenden, falls k groß genug gewählt wurde. Entsprechend [BL2], Theorem 2.8 existiert mit $n > 1$ und $\nu \in C_0^\infty(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\nu = 1$ in einer Umgebung von 0 für $z \in Z_\delta$, $z \to \infty$ eine asymptotische Entwicklung

$$\operatorname{tr}_{L^2(S,g)}\left(\nu\psi\left(\Delta + z^2\right)^{-n}\right) \sim_{\substack{z\to\infty \\ z\in Z_\delta}} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{1} A_{jl}^r(\psi)(\nu)\, z^{\alpha_j - 2n}(\log z)^l$$
$$=: \sum_{j=0}^{\infty} a_j^r(\psi)(\nu)\, z^{2-2j-2n} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j^r(\psi)\, z^{2-2j-2n}\log z + \sum_{j=0}^{\infty} c_j^r(\psi)\, z^{-j/N-2n}$$

mit

$$a_j^r(\psi)(\nu) = \int_0^\infty x^{1-2j}\nu(x)\,\widetilde{a}_j(\psi)\left(x^{\frac{1}{N}}\right)dx, \tag{2.4.1}$$
$$b_j^r(\psi) = \frac{1}{(2(j-1)N)!}\left.\frac{\partial^{2(j-1)N}}{\partial x^{2(j-1)N}}\right|_{x=0}\widetilde{a}_j(\psi)(x),$$
$$c_j^r(\psi) = \int_0^\infty \frac{r^{j+2nN-1}}{(j+2nN-1)!}\left.\frac{\partial^{j+2nN-1}}{\partial x^{j+2nN-1}}\right|_{x=0}\widetilde{f}(x,r)\,dr. \tag{2.4.2}$$

Die letzten beiden Integrale sind im regularisierten Sinne entsprechend [BS1], S. 135ff zu verstehen. Gemäß [BL2], Lemma 2.4 und den darauf folgenden Überlegungen gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_{L^2(S,g)}\left(\psi\left(\Delta + z^2\right)^{-n}\right) \sim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in Z_\delta}} &\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{1} A_{jl}^r(\psi)(\nu)\, z^{\alpha_j-2n}(\log z)^l \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} B_j^r(n;\psi(1-\nu))\, z^{2-2j-2n} \\ &=: \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{1} A_{jl}^r(\psi)\, z^{\beta_j-2n}(\log z)^l.\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Mit

$$A_{jl}^h(\psi) = (-1)^l (n-1)!\sum_{u=l}^{l(j)} A_{ju}^h(\psi)\, 2^{-u}\binom{u}{u-l}\left.\frac{d^{u-l}}{d\beta^{u-l}}\right|_{\beta=\frac{\beta_j}{2}-n}(\Gamma(-\beta))^{-1}$$

gilt analog zu [BL2], Lemma 2.2

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{L^2(S,g)}\left(\psi e^{-t\Delta}\right) &\sim_{t\to 0+} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{1} A^h_{jl}(\psi)\, t^{-\frac{\beta_j}{2}} (\log t)^k \\ &=: \sum_{j\geq 0} a_j(\psi)\, t^{j-1} + \sum_{j\geq 1} b_j(\psi)\, t^{j-1}\log t + \sum_{j\geq 0} c_j(\psi)\, t^{j/2N}\end{aligned}$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_j(\psi)$, $b_j(\psi)$ und $c_j(\psi)$. Entsprechend gilt für eine beliebige degenerierte Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_{L^2(S,g)}\left(\psi e^{-t\Delta}\right) \sim_{t\to 0+} &\sum_{j\geq 0} a_j(\psi)\, t^{j-1} + \sum_{j\geq 1} b_j(\psi)\, t^{j-1}\log t \\ &+ \sum_{p\in\Sigma}\sum_{j\geq 0} c_j(\psi)(p)\, t^{j/2N(p)}\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_j(\psi)$, $b_j(\psi)$und $c_j(\psi)(p)$.

2.4.1 Satz: *In der asymptotischen Entwicklung (2.4.4) gilt*

$$b_1(\psi) = 0.$$

Beweis: In [BL2], Formel (4.7) wird gezeigt, daß für den ersten Koeffizienten aus der asymptotischen Entwicklung (2.1.3)

$$\widetilde{a}_1(0) = 0$$

gilt. Da

$$\psi(0, .) \equiv \psi(p)$$

konstant ist, gilt

$$\mathrm{tr}_{L^2(S^1)}\left(\psi(0, .)\, G^k_{\varepsilon,0}\left(\zeta^N; 1, 1\right)\right) = \psi(p)\,\mathrm{tr}_{L^2(S^1)}\, G^k_{\varepsilon,0}\left(\zeta^N; 1, 1\right).$$

Folglich ist

$$\widetilde{a}_1(\psi)(0) = \psi(p)\,\widetilde{a}_1(0) = 0, \tag{2.4.5}$$

woraus wir analog zu [BL2], Formel (4.13)

$$b_1(\psi) = 0$$

erhalten.

$\boxed{2.4.1}$

2.4.2 Satz: *Für $\varphi,\ \psi\ \in\ C^{\infty}(S)$ gilt für die Frechet–Ableitung der ζ–regularisierten Determinante von Δ_φ bezüglich φ in Richtung ψ*

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\det\Delta_\varphi(\psi)=2B,$$

wobei B den für $t\to 0+$ bezüglich t konstanten Term der asymptotischen Entwicklung von

$$\operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi}-\textstyle\fint_\varphi\right)\right)$$

bezeichnet.

Beweis: Analog zu Formel (2.2.3) gilt für $s\in\mathbb{C}$ und hinreichend großes $\widetilde{L}$

$$\int_0^\infty \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi}-\textstyle\fint_\varphi\right)\right)t^{s-1}dt=\sum_{j=0}^{\widetilde{L}}\frac{a_{\varphi,j}(\psi)}{s+j-1}-\sum_{j=2}^{\widetilde{L}}\frac{b_{\varphi,j}(\psi)}{(s+j-1)^2}$$
$$+\sum_{p\in\Sigma}\sum_{j=0}^{\widetilde{L}}\frac{c_{\varphi,j}(\psi)(p)}{s+j/2N(p)}-\frac{1}{s}+f(s)$$

mit einer ganzen Funktion f. Das impliziert die meromorphe Fortsetzbarkeit von $\frac{\partial}{\partial\varphi}\zeta_\varphi(s)(\psi)$ auf ganz $\mathbb{C}$ (vgl. Formel (2.3.8)). Es folgt

$$\left.\int_0^\infty s\ \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\ \left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi}-\textstyle\fint_\varphi\right)\right)t^{s-1}dt\right|_{s=0}$$
$$=a_{\varphi,1}(\psi)+\sum_{p\in\Sigma}c_{\varphi,0}(\psi)(p)-1.$$

Unter Beachtung der Formeln (2.3.8) und (2.4.4) erhalten wir mit dem Satz von Schwarz

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\zeta_\varphi(s)(\psi)&=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\frac{\partial}{\partial\varphi}\zeta_\varphi(s)(\psi)\\&=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\frac{2}{\Gamma(s)}\int_0^\infty s\ \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi}-\textstyle\fint_\varphi\right)\right)t^{s-1}dt\\&=2\left(a_{\varphi,1}(\psi)+\sum_{p\in\Sigma}c_{\varphi,0}(\psi)(p)-\textstyle\fint_\varphi\psi\right)\\&=2\cdot\ \text{konst. Term von }\ \operatorname{tr}_{L^2(S,g_\varphi)}\left(\psi\left(e^{-t\Delta_\varphi}-\textstyle\fint_\varphi\right)\right).\end{aligned}\tag{2.4.6}$$

$\boxed{2.4.2}$

2.4.3 Satz: *Die Krümmung K_0 von (S, g) ist Lebesgue–integrierbar. Darüber hinaus gilt*

$$K_0 \in L^r(S, g)$$

für alle $r \in \mathbb{R}$, $1 \leq r < \frac{2\widetilde{N}}{2\widetilde{N}-1}$ mit

$$\widetilde{N} := \max\{N(p) \,|\, p \in \Sigma\}.$$

Beweis: Wir betrachten eine Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$.

Sei $p \in \Sigma$ mit Multiplizität N und U_p eine Umgebung von p wie auf S. 41f. Dann gilt auf U_p unter Beachtung von Formel (1.2.1)

$$\begin{aligned} g_{11}(x, \vartheta) &= \alpha\left(x^{\frac{1}{N}}, \vartheta\right)^2, \\ g_{22}(x, \vartheta) &= \beta\left(x^{\frac{1}{N}}, \vartheta\right)^2 N^2 x^2, \\ g_{12} = g_{21} &= 0. \end{aligned}$$

Gemäß [dC2], S. 56, Formel (10) gilt für die zugehörigen Christoffel–Symbole

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{2} g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\right)$$

für $i,\ j,\ k = 1,\ 2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^{1}(x,\vartheta) =& \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}{N\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)} \cdot x^{\frac{1}{N}-1}, \\
\Gamma_{11}^{2}(x,\vartheta) =& -\frac{\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}{N^{2}\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^{2}} \cdot x^{-2}, \\
\Gamma_{12}^{1}(x,\vartheta) =& \Gamma_{21}^{1}\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}{\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}, \\
\Gamma_{12}^{2}(x,\vartheta) =& \Gamma_{21}^{2}\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}{N\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)} \cdot x^{\frac{1}{N}-1} + x^{-1}, \\
\Gamma_{22}^{1}(x,\vartheta) =& -\frac{N\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}{\left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^{2}} \cdot x^{\frac{1}{N}+1} - \frac{N^{2}\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^{2}}{\left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^{2}} \cdot x, \\
\Gamma_{22}^{2}(x,\vartheta) =& \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}{\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)}.
\end{aligned}$$

Mit der Gaußschen Formel ([dC1], S. 178) gilt

$$-g_{11}K_{0} = \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_{12}^{2} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2},$$

woraus wir

$$
\begin{aligned}
K_0(x,\vartheta) = \Bigg(& \left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right) \\
& - \left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right) \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^3 N x^{\frac{1}{N}} \\
& - \alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)(N+1)\,x^{\frac{1}{N}} \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)x^{\frac{2}{N}} \\
& - \alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)x^{\frac{2}{N}} \Bigg) \\
& \cdot \left(\left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^3\left(\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^3 N^2 x^2\right)^{-1}
\end{aligned}
\tag{2.4.7}
$$

berechnen können. Wegen $\alpha, \beta \in C^\infty\left([0,\varepsilon)\times S^1\right)$ und wegen Formel (1.2.2) dürfen wir — gegebenenfalls nach Verkleinerung von U_p — annehmen, daß auf U_p

$$\frac{1}{2} \leq \alpha,\ \beta \leq \frac{3}{2}$$

gilt. Weiterhin sind alle Ableitungen von α und β auf U_p beschränkt. Mit Formel (1.2.2) gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\alpha\right)(0,\,.\,) = \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\beta\right)(0,\,.\,) \equiv 0$$

und damit

$$
\begin{aligned}
& \left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\beta\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right) \\
& - \left(\alpha\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}\alpha\right)\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right)\beta\left(x^{\frac{1}{N}},\vartheta\right) = O\left(x^{\frac{1}{N}}\right)
\end{aligned}
$$

für $(x,\vartheta)\in U_p$. Daher folgt für $(x,\vartheta)\in U_p$ aus Formel (2.4.7)

$$K_0(x,\vartheta) = O\left(x^{\frac{1}{N}-2}\right). \tag{2.4.8}$$

Weil K_0 glatt und damit lokal integrierbar ist, folgt daraus die Integrierbarkeit auf U_p. Da $S \setminus \bigcup_{p\in\Sigma} U_p$ kompakt ist, ist K_0 auch dort integrierbar. Folglich ist K_0 auf S im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

$K_0 \in L^r(S,g)$ mit r wie oben folgt nun direkt aus Formel (2.4.8).

$\boxed{2.4.3}$

2.4.4 Korollar: *Die Krümmung K_φ von (S, g_φ) ist bezüglich g Lebesgue–integrierbar und für $r \in \mathbb{R}$, $1 \leq r < \frac{2\widetilde{N}}{2\widetilde{N}-1}$ mit*

$$\widetilde{N} = \max\{\, N(p) \,|\, p \in \Sigma\}$$

gilt

$$K_\varphi \in L^r(S, g)\,.$$

Beweis: Da $g_\varphi \in \mathcal{G}(S)$ gilt und die Multiplizitäten bezüglich g und g_φ übereinstimmen (siehe Abschnitt 2.3), folgt die Aussage aus Satz 2.4.3.

$\boxed{2.4.4}$

2.4.5 Satz: *Mit $\psi \in C^\infty(S)$ und den Koeffizienten $a_1(\psi)$, $c_0(\psi)(p)$ aus Formel (2.4.4) gilt*

$$\begin{aligned} a_1(\psi) + \sum_{p \in \Sigma} c_0(\psi)(p) &= \frac{1}{12\pi} \int\limits_S K_0 \cdot \psi \,\mathrm{dvol}_0 \\ &\quad - \frac{1}{12} \sum_{p \in \Sigma} \psi(p) \left(N(p) - N(p)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Beweis: Wir führen den Beweis in Analogie zu den Beweisen von [BL2], Lemma 4.4 und [BL2], Lemma 4.11.

Wir weisen darauf hin, daß $a_1(\psi)$ durch Formel (2.4.4) nicht wohldefiniert ist. Allerdings wird

$$a_1(\psi) + \sum_{p \in \Sigma} c_0(\psi)(p)$$

durch Formel (2.4.4) eindeutig bestimmt.

Zunächst betrachten wir eine Metrik g mit nur einer Singularität der Multiplizität N bei p. Der allgemeine Fall folgt entsprechend.

Zuerst wenden wir uns $a_1(\psi)$ zu. Wegen Formel (2.4.5) läßt sich dieser Koeffizient in enger Anlehnung an den Beweis von [BL2], Lemma 4.4 berechnen. Wir erhalten analog zu [BL2], Formel (4.8)

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_0^\infty x^{-1} \mathbb{1}_{[0,\delta]}(x)\, \widetilde{a}_1(\psi) \left(x^{\frac{1}{N}} \right) dx = 0. \tag{2.4.9}$$

Dabei ist das Integral im regularisierten Sinne wie in [BS1], S. 135f zu verstehen. $\mathbb{1}_{[0,\delta]}$ steht für die charakteristische Funktion von $[0,\delta]$. Aus [BL2], Formel (4.5) wissen wir, daß für B_1^r wie in Satz 1.4.6 und $p \in \mathring{S}$

$$B_1^r\left(k;p\right) = \frac{K_0\left(p\right)}{12\pi}$$

gilt. Mit einer Umgebung U von p, wie auf S. 41f und $U_\delta \subset U$,

$$U_\delta = (0,\delta) \times S^1,$$

$\delta > 0$, folgt daraus für hinreichend kleines δ

$$\begin{aligned}&\int\limits_S \left(1 - \mathbb{1}_{U_\delta}\right)(p) \cdot \psi\left(p\right) \cdot B_1^r\left(k;p\right) \mathrm{dvol}_0\left(p\right)\\ &= \frac{1}{12\pi} \int\limits_{S\setminus U_\delta} \psi\left(p\right) \cdot K_0\left(p\right) \mathrm{dvol}_0\left(p\right).\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Mit Satz 2.4.3 erhalten wir dann entsprechend [BL2], Formel (4.4) aus den Formeln (2.4.1) und (2.4.3) zusammen mit den Formeln (2.4.9) und (2.4.10)

$$\begin{aligned}a_1\left(\psi\right) &= \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_0^\infty x^{-1}\mathbb{1}_{[0,\delta]}\left(x\right)\widetilde{a}_1\left(\psi\right)\left(x^{\frac{1}{N}}\right)dx\right.\\ &\qquad\left. + \int\limits_S \left(1 - \mathbb{1}_{U_\delta}\right)(p) \cdot \psi\left(p\right) \cdot B_1^r\left(k;p\right) \mathrm{dvol}_0\left(p\right)\right)\\ &= \frac{1}{12\pi}\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{S\setminus U_\delta} K_0\left(p\right)\cdot\psi\left(p\right)\mathrm{dvol}_0\left(p\right)\\ &= \frac{1}{12\pi}\int\limits_S K_0\left(p\right)\cdot\psi\left(p\right)\mathrm{dvol}_0\left(p\right).\end{aligned}$$

Nun kommen wir zur Herleitung von $c_0\left(\psi\right)\left(p\right)$. Da

$$\psi\left(0,\,.\,\right) \equiv \psi\left(p\right)$$

ist, gilt mit Formel (2.4.2)

$$\begin{aligned}c_0\left(\psi\right) &= \int\limits_0^\infty N\xi^{2kN-1}\,\mathrm{tr}_{L^2(S^1)}\left(\psi\left(p\right)G^k_{\varepsilon,0}\left(\xi^N;1,1\right)\right)d\xi\\ &= \psi\left(p\right)\int\limits_0^\infty N\xi^{2kN-1}\,\mathrm{tr}_{L^2(S^1)}\,G^k_{\varepsilon,0}\left(\xi^N;1,1\right)d\xi = \psi\left(p\right)c_0,\end{aligned}$$

wobei c_0 den entsprechenden Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung in Formel (1.4.1) bezeichnet. $G^k_{\varepsilon,0}\left(\xi^N;1,1\right)$ ist wie in Formel (2.1.2) zu verstehen. Mit [BL2], Lemma 4.11 erhalten wir nun

$$c_0\left(\psi\right)=\psi\left(p\right)c_0=\psi\left(p\right)\left(N-N^{-1}\right).$$

$\boxed{2.4.5}$

2.4.6 Theorem: *Es gilt die Polyakov–Formel*

$$\begin{aligned}\log\det\Delta_\varphi = &-\frac{1}{12\pi}\int_S\left|D\varphi\right|_0^2\mathrm{dvol}_0\\ &-\frac{1}{6\pi}\int_S K_0\cdot\varphi\ \mathrm{dvol}_0+\log\mathrm{vol}_\varphi S\\ &+\frac{1}{6}\sum_{p\in\Sigma}\varphi\left(p\right)\left(N\left(p\right)-N\left(p\right)^{-1}\right)\\ &+\log\det\Delta_0-\log\mathrm{vol}_0 S.\end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, daß die Indizes 0 und φ jeweils gemäß der Konvention auf S. 48 zu verstehen sind.

Beweis: Aus Satz 2.4.2 und Satz 2.4.5 folgt mit den Formeln (2.3.3) und (2.3.5) analog zur Argumentation von [OPS], S. 156

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\zeta_\varphi\left(s\right)\left(\psi\right)\\ &=2\left(\frac{1}{12\pi}\int_S K_\varphi\cdot\psi\ \mathrm{dvol}_\varphi-\frac{1}{12}\sum_{p\in\Sigma}\psi\left(p\right)\left(N\left(p\right)-N\left(p\right)^{-1}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{\mathrm{vol}_\varphi S}\int_S\psi\ \mathrm{dvol}_\varphi\right)\\ &=\frac{1}{6\pi}\int_S\psi\left(K_0+\Delta_0\psi\right)\mathrm{dvol}_0-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\mathrm{vol}_\varphi S\right)\left(\psi\right)\\ &\quad-\frac{1}{6}\sum_{p\in\Sigma}\psi\left(p\right)\left(N\left(p\right)-N\left(p\right)^{-1}\right).\end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned}\log\det\Delta_\varphi = -\zeta_\varphi'(0) = &-\frac{1}{12\pi}\int\limits_S |D\varphi|_0^2 \,\mathrm{dvol}_0 - \frac{1}{6\pi}\int\limits_S K_0\cdot\varphi \,\mathrm{dvol}_0 \\ &+ \log\mathrm{vol}_\varphi S + \frac{1}{6}\sum_{p\in\Sigma}\varphi(p)\left(N(p) - N(p)^{-1}\right) + C,\end{aligned}$$

wobei C eine von φ unabhängige Konstante ist. Mit $\varphi \equiv 0$ sieht man

$$\log\det\Delta_0 = \log\mathrm{vol}_0 S + C.$$

Damit folgt die Behauptung.

$\boxed{2.4.6}$

3 Ein Uniformisierungssatz

Der klassische Uniformisierungssatz ([FK], S. 195) besagt, daß nach konformer Variation der Metrik die universelle Überlagerung jeder zusammenhängenden orientierten geschlossenen Riemannschen Fläche isometrisch zu S^2, $\mathbb{R}^2$ oder zur hyperbolischen Halbebene $\mathbb{H}$ ist. Das impliziert insbesondere, daß sich jede Metrik einer solchen Riemannsche Fläche durch konforme Variation auf eine Metrik konstanter Krümmung transformieren läßt. Wir wollen untersuchen, inwiefern sich diese Aussage auf kompakte Riemannsche Flächen S, die eine Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$ tragen verallgemeinern läßt.

Auch hier sei S grundsätzlich eine zusammenhängende geschlossene Riemannsche Fläche, versehen mit einer degenerierten Metrik $g \in \mathcal{G}(S)$. Der singuläre Ort von (S, g) wird mit Σ bezeichnet.

Ohne Einschränkung dürfen wir $\operatorname{vol}_0 S = 1$ annehmen. Indizes wie 0, φ o.ä. sind gemäß der Konvention auf S. 48 zu verstehen.

3.1 Uniformisierbarkeit im Fall $C_S(g) \leq 0$

In [OPS], Kapitel 2 wird ein Funktional F definiert, das gleich dem unten definierten Funktional F im Spezialfall $\Sigma = \emptyset$ ist. Anschließend wird für Flächen vom Geschlecht ≥ 1 gezeigt, daß F unter Variation mit glatten Funktionen ein Minimum bei einer Funktion φ annimmt und, daß die von φ induzierte Metrik g_φ konstante Krümmung hat. Bei der Adaption dieser Überlegungen auf degenerierte Metriken aus $\mathcal{G}(S)$ verwenden wir viele Ideen und Überlegungen aus [OPS], Kapitel 2.

Wir betrachten das Funktional

$$\begin{aligned} F : C^\infty(S) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \frac{1}{2}\int_S |D\varphi|_0^2 \,\mathrm{dvol}_0 + \int_S K_0 \cdot \varphi \,\mathrm{dvol}_0 \\ &\quad - \pi\left(\chi(S) + \sum_{p\in\Sigma}(N(p)-1)\right)\log \operatorname{vol}_\varphi(S) \end{aligned}$$

(vgl. [OPS], Formel (2.1)). Die Eulercharakteristik $\chi(S)$ ist unabhängig von der zugrundeliegenden Metrik. Die Multiplizitäten $N(p)$ hängen zwar von g ab, sind aber invariant unter koformer Variation mit einer glatten

Funktion (Lemma 1.2.4). Aufgrund von Satz 2.4.3 und der Kompaktheit von S existiert der zweite Term von F. Wir definieren

$$C_S(g) := \chi(S) + \sum_{p \in \Sigma} (N(p) - 1).$$

$C_S(g)$ ist unabhängig von φ.

Wie man mit Theorem 2.4.6 sieht, gilt

$$\begin{aligned} F(\varphi) = &- 6\pi \log \det \Delta_\varphi + \pi \sum_{p \in \Sigma} \varphi(p) \left(N(p) - N(p)^{-1}\right) \\ &+ \pi (6 - C_S(g)) \log \mathrm{vol}_\varphi S + 6\pi \log \det \Delta_0 - 6\pi \log \mathrm{vol}_0 S. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

3.1.1 Beispiel: Wir betrachten $M \subset \mathbb{C}P^2$ mit $k, l \in \mathbb{N}$, $k > l$ und k und l relativ prim wie in Beispiel 1.1.4. $\mathbb{C}P^2$ trage eine hermitesche Metrik h. Dann gilt

$$C_M(h) = \chi(M) + k - 2 = k.$$

Im Fall der Neillschen Parabel gilt

$$C_M(h) = 3.$$

Wir wollen untersuchen ob bzw. unter welchen Bedingungen F ein Minimum besitzt. Zunächst stellen wir einige Hilfsmittel bereit, die wir dafür benötigen werden.

3.1.2 Satz: (vgl. [OPS], Abschnitt 2.1) *Falls $C_S(g) \leq 0$ ist, dann ist F konvex. $F|\ker \fint_0$ ist in diesem Fall strikt konvex.*

Beweis: Wir betrachten $a \in [0,1]$ und $\varphi, \psi \in C^\infty(S)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|D(a\varphi + (1-a)\psi)\|^2_{L^2(S,g)} &\leq \left(a \|D\varphi\|_{L^2(S,g)} + (1-a)\|D\psi\|_{L^2(S,g)}\right)^2 \\ &\leq a\|D\varphi\|^2_{L^2(S,g)} + (1-a)\|D\psi\|^2_{L^2(S,g)}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Damit ist

$$\varphi \mapsto \|D\,\varphi\|^2_{L^2(S,g)}$$

konvex.

$$\varphi \mapsto \int_S K_0 \cdot \varphi \, \mathrm{dvol}_0$$

ist linear. Mit der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\log \int\limits_S e^{2(a\varphi+(1-a)\psi)}\,\mathrm{dvol}_0 &\leq \log\left(\left(\int\limits_S e^{2\varphi}\,\mathrm{dvol}_0\right)^a \left(\int\limits_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}_0\right)^{1-a}\right)\\ &= a\log\int\limits_S e^{2\varphi}\,\mathrm{dvol}_0 + (1-a)\log\int\limits_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}_0 .\end{aligned}$$

Daher ist die Abbildung

$$\varphi \mapsto -\pi C_S\,(g)\log\int\limits_S e^{2\varphi}\,\mathrm{dvol}_0$$

konvex. Zusammenfassend erhalten wir die Konvexität von F.

Wenn wir zeigen können, daß für $0 < a < 1$ und $\varphi,\ \psi \in C^\infty(S) \cap \ker ⨍_0$ mit $x := D\varphi$ und $y := D\psi$ die strikte Ungleichung

$$\|ax + (1-a)\,y\|^2_{L^2(S,g)} < a\,\|x\|^2_{L^2(S,g)} + (1-a)\,\|y\|^2_{L^2(S,g)} \tag{3.1.3}$$

erfüllt ist, dann folgt daraus die strikte Konvexität von $F|\ker ⨍_0$.

Zunächst nehmen wir $\|x\|_{L^2(S,g)} \neq \|y\|_{L^2(S,g)}$ an. Weil $\|x\|_{L^2(S,g)} > 0$ oder $\|y\|_{L^2(S,g)} > 0$ sowie $a < a^2$ und $(1-a)^2 < 1-a$ gilt, ist Formel (3.1.3) eine Folgerung aus Formel (3.1.2).

Wir betrachten nun den Fall $\|x\|_{L^2(S,g)} = \|y\|_{L^2(S,g)}$. Wegen

$$⨍_0\,\varphi = ⨍_0\,\psi = 0$$

gilt für $\varphi \neq \psi$

$$x = D\varphi \neq D\psi = y.$$

Wir schreiben $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 = \lambda x$, $-1 < \lambda < 1$ und $y_2 \perp_g x$. Dann gilt

$$\|y_2\|^2_{L^2(S,g)} = \left(1-\lambda^2\right)\|x\|^2_{L^2(S,g)}$$

und

$$\begin{aligned}&\|ax + (1-a)\,y\|^2_{L^2(S,g)}\\ &= \|ax + (1-a)\,y_1\|^2_{L^2(S,g)} + \|(1-a)\,y_2\|^2_{L^2(S,g)}\\ &= (a + (1-a)\,\lambda)^2\,\|x\|^2_{L^2(S,g)} + (1-a)^2\left(1-\lambda^2\right)\|x\|^2_{L^2(S,g)}\\ &= \left((a+(1-a)\,\lambda)^2 + (1-a)^2\left(1-\lambda^2\right)\right)\|x\|^2_{L^2(S,g)} .\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$a\,\|x\|^2_{L^2(S,g)} + (1-a)\,\|y\|^2_{L^2(S,g)} = \|x\|^2_{L^2(S,g)} .$$

Daher müssen wir zeigen, daß

$$(a + (1-a)\lambda)^2 + (1-a)^2 \left(1 - \lambda^2\right) < 1$$

gilt. Das ist äquivalent zur Gleichung

$$0 < (1-a)(1-\lambda),$$

die wegen $a < 1$ und $\lambda < 1$ erfüllt ist.

$\boxed{3.1.2}$

Analog den Überlegungen auf S. 41f betrachten wir um einen singulären Punkt $p \in \Sigma$ eine Umgebung $U \subset \overset{\circ}{S}$ mit

$$U \simeq (0, \varepsilon) \times S^1.$$

Auf U stellt sich die Metrik g in Polarkoordinaten durch

$$g(x, \vartheta) = \widetilde{\alpha}^2 (x, \vartheta)\, dx^2 + \widetilde{\beta}^2 (x, \vartheta)\, N^2 x^2 d\vartheta^2$$

dar mit $\widetilde{\alpha}$ und $\widetilde{\beta}$ wie auf S. 41f. Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U folgt aus Formel (1.2.2), daß es eine Konstante $\widetilde{C} > 1$ gibt, so daß

$$\frac{1}{\widetilde{C}} < \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} < \widetilde{C}$$

gilt. Daher ist (U, g) quasiisometrisch zu U, versehen mit der euklidischen Metrik

$$g_e = dx^2 + x^2 d\vartheta^2.$$

Wir betrachten auf S eine Metrik σ, die eingeschränkt auf eine Umgebung des singulären Ortes isometrisch zu g_e ist. Dann sind g und σ zueinander quasiisometrisch. (S, σ) ist eine kompakte Riemannsche Fläche ohne Singularitäten.

3.1.3 Lemma: *g, g_φ mit $\varphi \in C^\infty(S)$ und σ sind paarweise quasiisometrisch.*

Beweis: Die Quasiisometrie von g und σ wurde bereits gezeigt.

Wegen der Kompaktheit von S ist φ und damit auch $e^{2\varphi}$ beschränkt. Weiter ist $e^{2\varphi}$ wegen der Beschränktheit von φ von 0 weg beschränkt. Daraus folgt die Quasiisometrie von g_φ und g.

Da g quasiisometrisch zu σ ist, sind auch g_φ und σ quasiisometrisch.

$\boxed{3.1.3}$

3.1.4 Korollar: *Für festes $r \geq 1$ und festes $\varphi \in C^\infty(S)$ sind auf S die L^r–Normen bezüglich der Metriken g, g_φ und σ äquivalent.*

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus der Quasiisometrie von g, g_φ und σ, die in Lemma 3.1.3 gezeigt wurde.

$\boxed{3.1.4}$

3.1.5 Definition: *Mit Δ_σ bezeichnen wir den Laplaceoperator auf (S, σ). Wegen der Kompaktheit von S ist Δ_σ wesentlich selbstadjungiert (vgl. etwa Theorem 1.3.3). Den Abschluß von Δ_σ bezeichnen wir wiederum mit Δ_σ.*

3.1.6 Korollar: *Mit h wie in Definition 1.2.1 ergibt sich in einer Umgebung einer Singularität analog zu Formel (2.3.3)*

$$\mathrm{dvol}_0 = h \, \mathrm{dvol}_\sigma$$

und entsprechend Formel (2.3.4)

$$\Delta_0 = \frac{1}{h} \Delta_\sigma.$$

3.1.7 Lemma: (vgl. [OPS], Formel (2.16)) *Für $\varphi \in C^\infty(S)$ gilt*

$$\left|(K_0, \varphi)_0\right| \leq C \left\|\varphi\right\|_{H^1(S,\sigma)}.$$

Dabei ist C eine Konstante, die nicht von φ abhängt. $\|\,.\,\|_{H^1(S,\sigma)}$ bezeichnet die Sobolev–Norm der Stufe 1 bezüglich σ.

Beweis: Gemäß Satz 2.4.3 gilt

$$K_0 \in L^r(S, g)$$

für ein r, $1 < r < 2$. Aufgrund von Korollar 3.1.4 folgt

$$K_0 \in L^r(S, \sigma).$$

Nun gilt mit der Hölderschen Ungleichung und Korollar 3.1.4

$$\begin{aligned} \left|(K_0, \varphi)_0\right| &\leq \left\|K_0\right\|_{L^r(S,g)} \left\|\varphi\right\|_{L^q(S,g)} \\ &\leq C_1 \left\|K_0\right\|_{L^r(S,\sigma)} \left\|\varphi\right\|_{L^q(S,\sigma)} \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

mit $q = \frac{r}{r-1}$ und einer von φ unabhängigen Konstante C_1. Wegen der Kompaktheit von S gilt mit der Sobolev–Ungleichung ([GT], Theorem 7.10)

$$\|\varphi\|_{L^q(S,\sigma)} \leq C_2 \|\varphi\|_{W^{1,p}(S,\sigma)} \leq C_2 \cdot C_3 \|\varphi\|_{H^1(S,\sigma)} \tag{3.1.5}$$

mit p, $\frac{2q}{2+q} < p < 2$ und Konstanten C_2 und C_3, die nicht von φ abhängen. $\| \, . \, \|_{W^{k,p}}$ bezeichnet die L^p–Sobolev–Norm der Stufe k. Aus den Formeln (3.1.4) und (3.1.5) folgt die Behauptung.

$\boxed{3.1.7}$

3.1.8 Satz: *Es gilt die Gauß–Bonnet Formel*

$$\int\limits_S K_0 \, \mathrm{dvol}_0 = 2\pi \left(\chi(S) + \sum_{p \in \Sigma} (N(p) - 1) \right) = 2\pi C_S(g) \, .$$

Beweis: [BL2], Formel (4.12) besagt

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S \setminus U_\delta} K_0 \, \mathrm{dvol}_0 = \chi_{(2)}(S) + \sum_{p \in \Sigma} (N(p) - 1)$$

mit U_δ wie im Beweis von Satz 2.4.5. Gemäß Lemma 1.4.4 gilt $\chi_{(2)} = \chi(S)$. Aus Satz 2.4.3 wissen wir $K_0 \in L^1(S, g)$, woraus

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{S \setminus U_\delta} K_0 \, \mathrm{dvol}_0 = \int\limits_S K_0 \, \mathrm{dvol}_0$$

folgt. Daraus folgt die Behauptung.

$\boxed{3.1.8}$

3.1.9 Lemma: *Für die Krümmung K_φ bezüglich der von $\varphi \in C^\infty(S)$ induzierten Metrik $g_\varphi = e^{2\varphi} g$ gilt*

$$\int\limits_S K_\varphi \, \mathrm{dvol}_\varphi = \int\limits_S K_0 \, \mathrm{dvol}_0 = 2\pi C_S(g) \, .$$

Beweis: Mit Satz 3.1.8 und Formel (2.3.5) gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_S K_\varphi \, \mathrm{dvol}_\varphi &= \int\limits_S e^{-2\varphi} (K_0 + \Delta_0 \varphi) e^{2\varphi} \, \mathrm{dvol}_0 \\ &= \int\limits_S K_0 \, \mathrm{dvol}_0 + \int\limits_S \Delta_0 \varphi \, \mathrm{dvol}_0 \\ &= \int\limits_S K_0 \, \mathrm{dvol}_0 = 2\pi C_S(g) \, . \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Δ_0 ist hier als lokaler Operator auf $C^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$ zu verstehen. Die vorletzte Gleichheit in Formel (3.1.6) läßt sich wie folgt begründen. Wir zerlegen φ in

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{p\in\Sigma} \varphi_p$$

mit $\varphi_0 \in C_0^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$ und $\varphi_p \in C^\infty(S)$, das außerhalb einer hinreichend kleinen Umgebung von p verschwindet. Dann gilt

$$\int_S \Delta_0\varphi_0 \,\mathrm{dvol}_0 = (\Delta_0\varphi_0, 1)_0 = (D\varphi_0, D1)_0 = 0.$$

Für $p \in \Sigma$ gilt mit Korollar 3.1.6 mit h wie in Definition 1.2.1

$$\int_S \Delta_0\varphi_p \,\mathrm{dvol}_0 = \int_S \frac{1}{h}(\Delta_\sigma\varphi_p)\, h \,\mathrm{dvol}_\sigma = (\Delta_\sigma\varphi_p, 1)_\sigma = (D\varphi_p, D1)_\sigma = 0.$$

Zusammenfassend erhalten wir

$$\int_S \Delta_0\varphi \,\mathrm{dvol}_0 = 0.$$

$\boxed{3.1.9}$

3.1.10 Satz: (vgl. [OPS], Formel (2.2)) *F ist translationsinvariant. Das bedeutet, daß für $\varphi \in C^\infty(S)$ und $a \in \mathbb{R}$*

$$F(\varphi + a) = F(\varphi)$$

gilt.

Beweis: Mit Satz 3.1.8 gilt

$$\begin{aligned} F(\varphi + a) =& \frac{1}{2}\int_S |D\varphi|_0^2 \,\mathrm{dvol}_0 + \int_S K_0 \cdot \varphi \,\mathrm{dvol}_0 + a\int_S K_0 \,\mathrm{dvol}_0 \\ &- \pi C_S(g) \log\left(e^{2a}\int_S e^{2\varphi}\,\mathrm{dvol}_0\right) \\ =& F(\varphi) + a\int_S K_0 \,\mathrm{dvol}_0 - 2\pi a C_S(g) = F(\varphi). \end{aligned}$$

$\boxed{3.1.10}$

Wir werden Satz 3.1.10 später benutzen, um zu zeigen, daß ein Minimum von $F|\ker ⨍_0$ auch ein Minimum von F ist.

3.1.11 Lemma: (vgl. [OPS], Formel (2.18)) *Ist $C_S(g) \le 0$, so gibt es Konstanten C_1, $C_2 > 0$ derart, daß für alle $\varphi \in C^\infty(S)$ mit $⨍_0 \varphi = 0$*

$$\sqrt{2}C_2\left(\sqrt{F(\varphi) + \frac{C_1^2}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2}}\right) \ge \|\varphi\|_{H^1(S,\sigma)}$$

gilt.

Beweis: Mit Lemma 3.1.7 wissen wir

$$|(K_0, \varphi)_0| \le C_3 \|\varphi\|_{H^1(S,\sigma)}$$

mit einer von φ unabhängigen Konstante C_3. Mit Korollar 3.1.4 wissen wir

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{H^1(S,\sigma)} &\le C_4\left(\|D\varphi\|_{L^2(S,\sigma)} + \|\varphi\|_{L^2(S,\sigma)}\right)\\ &\le C_4 \cdot C_5\left(\|D\varphi\|_{L^2(S,g)} + \|\varphi\|_{L^2(S,g)}\right)\end{aligned}$$

mit Konstanten C_4 und C_5, die nicht von φ abhängen. $\lambda_1 > 0$ bezeichne den kleinsten nichtverschwindenden Eigenwert von Δ_0 als Operator auf Funktionen. Wegen $⨍_0 \varphi = 0$ gilt $\varphi \perp_g const$, woraus die Poincaré–Ungleichung

$$\|D\varphi\|_{L^2(S,g)} \ge \lambda_1 \|\varphi\|_{L^2(S,g)} \tag{3.1.7}$$

folgt. Zusammenfassend erhalten wir

$$|(K_0, \varphi)_0| \le C_1 \|D\varphi\|_{L^2(S,g)}$$

mit

$$C_1 := C_3 \cdot C_4 \cdot C_5 \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right).$$

Da die Exponentialfunktion konvex ist, folgt aus der Jensenschen Ungleichung

$$1 = \mathrm{vol}_0\, S = e^{2\int_S \varphi\, \mathrm{dvol}_0} \le \int_S e^{2\varphi}\, \mathrm{dvol}_0,$$

woraus

$$\log \int_S e^{2\varphi} \, \mathrm{dvol}_0 \geq 0$$

folgt.

Mit den beiden letzten Abschätzungen erhalten wir

$$\begin{aligned} F(\varphi) &\geq \frac{1}{2} \|D\varphi\|^2_{L^2(S,g)} - C_1 \|D\varphi\|_{L^2(S,g)} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|D\varphi\|_{L^2(S,g)} - \frac{C_1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \frac{C_1^2}{2} \end{aligned}$$

und damit

$$\sqrt{2} \left(\sqrt{F(\varphi) + \frac{C_1^2}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2}} \right) \geq \|D\varphi\|_{L^2(S,g)} .$$

Wie oben gezeigt wurde, gilt

$$\|\varphi\|_{H^1(S,\sigma)} \leq C_4 \cdot C_5 \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_1}\right) \|D\varphi\|_{L^2(S,g)} .$$

Mit Korollar 3.1.4 folgt daraus die Behauptung.

$\boxed{3.1.11}$

3.1.12 Theorem: (vgl. [OPS], Abschnitt 2.2) *Falls $C_S(g) \leq 0$ gilt, nimmt $F(\varphi)$ unter der Variation von φ in*

$$\left\{ \varphi \in C^\infty(S) \, , \, \textstyle{\fint_0} \varphi = 0 \right\} \tag{3.1.8}$$

ein Minimum bei einem eindeutig bestimmten $\psi \in C^\infty(S) \cap \ker \fint_0$ an. Die Krümmung K_ψ bezüglich der von ψ auf $\mathring{S}$ induzierten Metrik

$$g_\psi = e^{2\psi} g$$

ist konstant und hat den Wert $\frac{2\pi C_S(g)}{\mathrm{vol}_\psi S}$. ψ ist die einzige $C^\infty(S)$–Funktion im Kern von $\fint_0$, die auf $\mathring{S}$ eine Metrik konstanter Krümmung induziert.

Zum Beweis von Theorem 3.1.12 benötigen wir ein Lemma von J. L. Kazdan und F. W. Warner.

3.1.13 Lemma: *([KW], S. 23, Formeln (3.6) und (3.7)) Sei M eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche mit glatter Riemannscher Metrik. Dann gilt für $u \in H^1(M)$ und $1 \leq r < \infty$*

$$e^u \in L^r(M) .$$

Für eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(M)$, die bezüglich der H^1–Norm schwach gegen $u \in H^1(M)$ konvergiert gilt

$$e^{u_k} \xrightarrow[k\to\infty]{L^2} e^u.$$

3.1.14 Bemerkung: Schwache Konvergenz einer Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen u in $H^1(M)$ bedeutet, daß u_k schwach gegen u in $L^2(M)$ sowie ∇u_k schwach gegen ∇u in $L^2(TM)$ konvergiert.

Beweis von Theorem 3.1.12: Wir wählen eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(S)$ mit $⨍_0 \varphi_n = 0$ für alle n, so daß $F(\varphi_n)$ monoton fallend gegen

$$F_0 := \inf\left\{F(\varphi)\,\middle|\,\varphi \in C^\infty(S)\,,\,⨍_0 \varphi = 0\right\}$$

konvergiert. Wegen

$$F(0) = 0$$

dürfen wir ohne Einschränkung

$$F(\varphi_1) \leq 0$$

annehmen. Mit Lemma 3.1.11 gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\|\varphi_n\|_{H^1(S,\sigma)} \leq \sqrt{2}C_2\left(\sqrt{F(\varphi_n) + \frac{C_1^2}{2}} + \frac{C_1}{\sqrt{2}}\right) \leq 2C_1C_2.$$

Dabei sind C_1 und C_2 die Konstanten aus Lemma 3.1.11.

Wegen dem Einbettungssatz von Rellich ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(S)$ präkompakt. Gegebenenfalls nach Übergang zu einer Teilfolge gilt also

$$\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \psi \in L^2(S).$$

Da alle φ_n im Kern von $⨍_0$ liegen, gilt dies auch für ψ. Die gleichmäßige Beschränktheit von $\|\varphi_n\|_{H^1(S,\sigma)}$ impliziert gleichmäßige Beschränktheit von

$$\|D\varphi_n\|_{L^2(S,\sigma)}\,,$$

woraus mit Lemma 1.4.7

$$\psi \in \mathcal{D}(D) = H^1(S,\sigma) \tag{3.1.9}$$

folgt.

Es gilt

$$\|D\psi\|_{L^2(S,g)} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|D\varphi_n\|_{L^2(S,g)}\,,$$

woraus wir durch Übergang zur Teilfolge $(\varphi_n)_{n\geq n_0}$

$$\|D\psi\|_{L^2(S,g)} \leq \inf_{n_0\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq n_0} \|D\varphi_n\|_{L^2(S,g)} = \liminf_{n\to\infty} \|D\varphi_n\|_{L^2(S,g)} \tag{3.1.10}$$

sehen. Weiterhin gilt

$$(K_0,\varphi_n)_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} (K_0,\psi)_0\,. \tag{3.1.11}$$

Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir

$$\mathrm{vol}_\psi S = \int_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}_0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int_S e^{2\varphi_n}\,\mathrm{dvol}_0\,. \tag{3.1.12}$$

Die ersten beiden Terme von F sind stetig in $H^1(S,\sigma)$. Wegen Lemma 3.1.13 gilt dies auch für den dritten Term. Daher können wir F durch Stetigkeit zu einem Funktional

$$\widetilde{F} : H^1(S,\sigma) \to \mathbb{R}$$

fortsetzen. Dann folgt aus den Formeln (3.1.10), (3.1.11) und (3.1.12)

$$\widetilde{F}(\psi) \leq \liminf_{n\to\infty} F(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} F(\varphi_n) = F_0$$

und damit

$$\widetilde{F}(\psi) = F_0.$$

Da

$$C^\infty(S) \subset H^1(S,\sigma)$$

dicht liegt, nimmt $\widetilde{F}$ bei ψ ein Minimum unter der Nebenbedingung

$$⨍_0 \psi = 0$$

an. Gemäß Satz 3.1.10 ist F und damit auch $\widetilde{F}$ translationsinvariant. Daher wird $\widetilde{F}$ von ψ nicht nur in $\left\{\varphi \in H^1(S,\sigma) \,\middle|\, ⨍_0 \varphi = 0\right\}$, sondern in ganz $H^1(S,\sigma)$ minimiert.

Wir müssen zeigen, daß ψ glatt ist. Dann folgt

$$F(\psi) = \widetilde{F}(\psi) = F_0.$$

Folglich nimmt F bei ψ ein Minimum an.

Weil $\widetilde{F}$ bei ψ ein Minimum annimmt, gilt für jedes $\vartheta \in C_0^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$

$$0 = \frac{\partial}{\partial\psi}\widetilde{F}(\psi)(\vartheta) = (D\psi, D\vartheta)_0 + (K_0, \vartheta)_0 - \frac{2\pi C_S(g)}{\int_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}_0}\left(e^{2\psi}, \vartheta\right)_0, \tag{3.1.13}$$

wobei $\frac{\partial}{\partial\psi}$ als Frechet–Ableitung zu verstehen ist. Das bedeutet

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\widetilde{F}(\psi)(\vartheta) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\widetilde{F}(\psi + \varepsilon\vartheta).$$

Es gilt $K_0 \in C^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right)$. Wegen $\psi \in H^1(S, \sigma)$ folgt aus Lemma 3.1.13

$$e^{2\psi} \in L^2(S).$$

Damit folgt aus Formel (3.1.13)

$$\Delta_0\psi = -K_0 + \frac{2\pi C_S(g)}{\int_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}_0}e^{2\psi} \in L^2_{loc}\left(\overset{\circ}{S}\right). \tag{3.1.14}$$

Δ_0 ist hier im distributiven Sinne zu verstehen. Δ_0 ist ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2, woraus

$$\psi \in H^2_{loc}\left(\overset{\circ}{S}, g\right)$$

folgt. Mit dem Sobolev–Lemma können wir daraus

$$\psi \in C^0\left(\overset{\circ}{S}\right)$$

schließen, woraus wir wiederum

$$e^{2\psi} \in C^0\left(\overset{\circ}{S}\right)$$

erhalten. Aus Lemma 1.4.10 folgt

$$e^{2\psi} \in H^2_{loc}\left(\overset{\circ}{S}, g\right).$$

Induktiv folgt nun aus Formel (3.1.14) mit genau derselben Argumentation

$$\psi \in C^\infty\left(\overset{\circ}{S}\right). \tag{3.1.15}$$

Gemäß Formel (2.3.5) gilt auf $\overset{\circ}{S}$ für die zur Metrik $g_\psi = e^{2\psi} g$ gehörige Krümmung

$$K_\psi \equiv \frac{2\pi C_S(g)}{\int_S e^{2\psi}\,\mathrm{dvol}_0}. \tag{3.1.16}$$

Wir wollen nun die Glattheit von ψ bei einer Singularität $p \in \Sigma$ zeigen. Zusammen mit Formel (3.1.15) folgt dann die Glattheit von ψ auf ganz S.

Sei $U \subset S$ eine Umgebung einer Singularität p von (S, g) der Multiplizität N. Wir identifizieren (U, σ) mit seiner isometrischen Einbettung in $\mathbb{C}$ wie in Definition 1.2.1. p wird mit $0 \in \mathbb{C}$ identifiziert. Mit h wie in Definition 1.2.1 gilt

$$h(z) = N^2 |z|^{2N-2} (1 + h_1(z))$$

mit $h_1 \in C^\infty(U)$ und

$$h_1(0) = 0.$$

Daraus folgt

$$\log h(z) = 2\log N + (2N-2)\log|z| + \log(1 + h_1(z)).$$

Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U gilt

$$\log(1 + h_1) \in C^\infty(U). \tag{3.1.17}$$

Nun gilt

$$\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}} \log|z| = \left(-\frac{\partial^2}{\partial |z|^2} - \frac{1}{|z|}\frac{\partial}{\partial |z|}\right)\log|z| = 0, \tag{3.1.18}$$

womit wir

$$\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}} \log h \in C^\infty(U \setminus \{0\}) \cap L^\infty(U) \tag{3.1.19}$$

erhalten. $\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}} \log h$ kann zu einer glatten Funktion $\omega \in C^\infty(U)$ fortgesetzt werden, wie man mit den Formeln (3.1.17) und (3.1.18) sieht.

Auf $U \setminus \{0\}$ gilt mit Formel (2.3.4)

$$\Delta_0 \psi = \frac{1}{h}\,\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}}\,\psi.$$

Aus Formel (2.3.5) erhalten wir

$$K_0 = \frac{1}{2h}\,\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}} \log h.$$

Wiederum mit Formel (2.3.5) folgt daraus

$$K_\psi = e^{-2\psi}\left(K_0 + \Delta_0\psi\right) = e^{-2\psi}\left(\frac{1}{2h}\,\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}}\log h + \frac{1}{h}\,\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}}\,\psi\right). \tag{3.1.20}$$

Wie in Formel (3.1.16) gezeigt wurde, ist K_ψ konstant. Wegen $\psi \in H^1(S)$ wissen wir mit Lemma 3.1.13, daß

$$e^{2\psi} \in L^2(S).$$

Es folgt aus den Formeln (3.1.19) und (3.1.20)

$$\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}}\,\psi = K_\psi h e^{2\psi} - \frac{1}{2}\,\Delta_\sigma|_{U\setminus\{0\}}\log h =: f \in L^2(U). \tag{3.1.21}$$

Aus Formel (3.1.9) wissen wir $\psi|\,U \in H^1_{loc}(U,\sigma)$. Daher gilt

$$\Delta_\sigma\psi \in H^{-1}_{loc}(U,\sigma).$$

Für alle $\mu \in C_0^\infty(U\setminus\{0\})$ gilt

$$\langle \Delta_\sigma\psi - f, \mu\rangle = 0 \tag{3.1.22}$$

und somit

$$\operatorname{supp}(\Delta_\sigma\psi - f) \subset \{0\}.$$

$\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ bezeichnet hier die duale Paarung $H^{-1}\times H^1 \to \mathbb{C}$. Da μ kompakten Träger hat, ist Formel (3.1.22) wohldefiniert, obwohl lediglich $\Delta_\sigma\psi - f \in H^{-1}_{loc}(U,\sigma)$ gilt. Aus [Tre], Theorem 24.6 folgt daher

$$\Delta_\sigma\psi - f = P(\delta_0),$$

wobei P ein Differentialoperator und δ_0 das Dirac–Maß im Punkt 0 ist. Für $u \in C^\infty(U)$ gilt also

$$P(\delta_0)(u) = (Pu)(0).$$

Angenommen, es würde $\delta_0 \in H^{-1}_{loc}(U,\sigma)$ gelten. Wegen $\operatorname{supp}\delta_0 = \{0\}$ würde dann $\delta_0 \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ folgen. Da die Fouriertransformierte von δ_0 als Distribution auf $\mathbb{R}^2$ aber konstant $\frac{1}{2\pi}$ ist, gilt

$$\|\delta_0\|^2_{H^{-1}(R^2)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(1+|\xi|^2\right)^{-1} d\xi = \infty.$$

Daraus folgt $\delta_0 \notin H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ und somit $\delta_0 \notin H^{-1}_{loc}(U,\sigma)$. Falls $P \neq 0$ bei 0 ist, erhalten wir daraus

$$P(\delta_0) \notin H^{-1}_{loc}(U,\sigma).$$

Deshalb muß $P = 0$ bei 0 gelten, und wir erhalten

$$\Delta_\sigma \psi = f \in L^2(U,\sigma).$$

Aus der Tatsache, daß Δ_σ ein elliptischer Differentialoperator der Ordnung 2 ist, folgt

$$\psi \in H^2_{loc}(U,\sigma),$$

woraus wir mit dem Sobolev–Lemma

$$\psi \in C^0(U)$$

und damit

$$e^{2\psi} \in C^0(U)$$

erhalten. Mit Formel (3.1.21) gilt auf U

$$\Delta_\sigma \psi = K_\psi h e^{2\psi} - \frac{1}{2}\omega.$$

Induktiv kann man analog zu den Überlegungen auf S. 79 daraus unter Ausnutzung der Elliptizität von Δ_σ

$$\psi \in C^\infty(U)$$

folgern.

Es bleibt die Eindeutigkeit von ψ zu zeigen. Aufgrund von Satz 3.1.2 ist $F|\ker ⨍_0$ strikt konvex. Daher ist das globale Minimum bei ψ das einzige lokale Minimum und auch der einzige kritische Punkt von F unter der Einschränkung $\psi \in \ker ⨍_0$. Sei $\mu \in C^\infty(S)$, $⨍_0 \mu = 0$ so gegeben, daß auf $\mathring{S}$ eine Metrik $g_\mu = e^{2\mu} g$ konstanter Krümmung K_μ induziert wird. Aus Lemma 3.1.9 und Formel (2.3.5) wissen wir, daß

$$K_\mu \equiv \frac{2\pi C_S(g)}{\int_S e^{2\mu}\,\mathrm{dvol}_0}$$

gilt. Damit gilt für jedes $\vartheta \in C^\infty(S)$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} F(\mu)(\vartheta) = \left(e^{2\mu} K_\mu, \vartheta\right)_0 - \frac{2\pi C_S(g)}{\int_S e^{2\mu}\,\mathrm{dvol}_0} \left(e^{2\mu}, \vartheta\right)_0 = 0.$$

$F|\ker ⨍_0$ hat also einen kritischen Punkt bei μ. Wegen der strikten Konvexität von $F|\ker ⨍_0$ gilt $\mu = \psi$.

3.1.12

3.1.15 Theorem: *Falls $C_S(g) < 0$ gilt, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\mu \in C^\infty(S)$, so daß*

$$\left(\overset{\circ}{S}, g_\mu = e^{2\mu} g\right)$$

konstante Krümmung -1 besitzt, g_μ also hyperbolisch ist.

Falls $C_S(g) = 0$ gilt, gibt es eine Funktion $\mu \in C^\infty(S)$, die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, so daß $\left(\overset{\circ}{S}, g_\mu\right)$ flach ist, also Krümmung 0 hat.

Beweis: Für $C_S(g) < 0$ gilt

$$\mu = \psi - \frac{1}{2} \log \int\limits_S e^{2\psi} \operatorname{dvol}_0,$$

wobei ψ die in Theorem 3.1.12 konstruierte Funktion ist.

Für $C_S(g) = 0$ gilt analog

$$\mu = \psi - \frac{1}{2} \log \int\limits_S e^{2\psi} \operatorname{dvol}_0 + a$$

mit einer beliebigen Konstante $a \in \mathbb{R}$.

Daß die angegebenen Funktionen Metriken der gewünschten Krümmungen erzeugen folgt aus Formel (2.3.5). Die Eindeutigkeit (bzw. Eindeutigkeit bis auf die Wahl von a im Fall $C_S(g) = 0$) von μ kann aus Theorem 3.1.12 gefolgert werden.

$\boxed{3.1.15}$

3.1.16 Bemerkung: In [Tro2] werden auf kompakten Riemannschen Flächen S degenerierte Metriken mit kegelartigen Singularitäten betrachtet, die allgemeiner sind, als die von uns betrachtete Klasse $\mathcal{G}(S)$. Ein wesentlicher Unterschied ist, daß singuläre Punkte der in [Tro2] betrachteten Metriken keine ganzzahligen Multiplizitäten haben müssen. Wenn Δ den Laplaceoperator bezüglich einer solchen Metrik bezeichnet, dann wird unter anderem die Differentialgleichung

$$\Delta u = h e^{\delta u} - h_0 \tag{3.1.23}$$

untersucht, wobei h und h_0 auf S Hölderstetige Funktionen sind und δ eine positive Zahl darstellt ([Tro2], Abschnitt 5). Formel (3.1.23) ähnelt Formel (2.3.5). Wie in der vorliegenden Arbeit induziert eine Lösung der

Gleichung (3.1.23) eine degenerierte Metrik mit Krümmung h auf $\overset{\circ}{S}$, wenn die zugrundeliegende Metrik Krümmung h_0 besitzt. Für den Spezialfall, daß sich die Krümmung bezüglich der zugrundeliegenden Metrik Hölderstetig auf ganz S fortsetzen läßt, wird in [Tro2] ein zu Theorem 3.1.15 analoges Resultat erzielt. Für das von uns betrachtete Problem für Metriken der Klasse $\mathcal{G}(S)$ geht Theorem 3.1.15 über die Aussagen der Theoreme 3 und 4 aus [Tro2], Abschnitt 5 hinaus, was die Regularität der uniformisierenden Funktion betrifft.

Dieselbe Klasse von Metriken wie in [Tro2] wird auch in [HT] betrachtet. Mit Methoden analog zu [Tro2] werden ähnliche Resultate unter geänderten Voraussetzungen an die Krümmung bezüglich der zugrundeliegenden Metrik erzielt ([HT], Theorem A). Angewandt auf das von uns betrachtete Uniformisierungsproblem bedeutet das, daß in Verbindung mit Satz 2.4.3 die Aussage von Theorem 3.1.15 mit schwächerer Regularität der uniformisierenden Funktion folgt.

3.1.17 Lemma: *Zu $p \in \Sigma$ und $C > 0$ gibt es ein $\varphi \in C^\infty(S)$ mit*

$$\Sigma \cap \operatorname{supp} \varphi = \{p\}$$

sowie

$$\|D\varphi\|_{L^2(S,g)} + \|\varphi\|_{L^2(S,g)} \leq 1$$

und $\varphi(p) \geq C$.

Beweis: Wir wählen eine Funktion f mit $\operatorname{supp} f \subset U$, wobei U eine hinreichend kleine Umgebung von p ist. Wir identifizieren (U, σ) mit ihrer isometrischen Einbettung in D_ε mit $0 < \varepsilon < 1$ wie in Definition 1.2.1. Es gebe eine Umgebung V von p mit $V \subset U$, so daß $f|\,U \setminus \{p\} \in C^\infty(U \setminus \{p\})$ und für $z \in V$

$$f(z) = \log(-\log|z|)$$

gilt. Wegen

$$|f(z)| < -\log|z|$$

gilt $f|\,V \in L^2(V)$ und damit $f \in L^2(S)$. Es gilt außerdem

$$Df(z) = \frac{1}{|z|\log|z|}dz,$$

woraus

$$\|Df\|^2_{L^2(V,\sigma)} \leq \int\limits_{D_\varepsilon} \frac{1}{|z|\log|z|}dz \wedge d\overline{z} = -\frac{1}{\log \varepsilon} < \infty$$

folgt. Weiterhin gilt $f \in C^\infty(S \setminus \{p\})$. Aus der Kompaktheit von S folgt $f \in H^1(S, \sigma)$.

Da $C^\infty(S) \cap H^1(S, \sigma) \subset H^1(S, \sigma)$ dicht liegt, gibt es zu $\widetilde{C} > 0$ ein $\varphi \in C^\infty(S)$ mit

$$\|\varphi\|_{H^1(S,\sigma)} \leq 2\,\|f\|_{H^1(S,\sigma)}$$

und $\varphi(p) > \widetilde{C}$. Falls nämlich für alle $\psi \in C^\infty(S)$ mit

$$\|\psi\|_{H^1(S,\sigma)} \leq 2\,\|f\|_{H^1(S,\sigma)}$$

$\psi(p) \leq \widetilde{C}$ gelten würde, dann würde auch $f(p) \leq \widetilde{C}$ gelten, was einen Widerspruch zur Konstruktion von f darstellt. Durch Skalierung von φ folgt die Behauptung.

$\boxed{3.1.17}$

Im Falle $\Sigma = \emptyset$ ist es unter der Nebenbedingung $\mathrm{vol}_\varphi S = 1$ äquivalent, F zu minimieren und $\det \Delta_\varphi$ zu maximieren, wie man mit Formel (3.1.1) sieht ([OPS], Abschnitt 2.1). Falls $g \in \mathcal{G}(S)$ singulär ist, ist das nicht so, sondern $\{\det \Delta_\varphi \,|\varphi \in C^\infty(S), \mathrm{vol}_\varphi S = 1\}$ ist unbeschränkt, wie der folgende Satz zeigt.

3.1.18 Satz: *Sei $\Sigma \neq \emptyset$ und es gebe ein $p \in \Sigma$ mit $N(p) \geq 2$. Dann gibt es zu jedem $C > 0$ ein $\varphi \in C^\infty(S)$ mit $\mathrm{vol}_\varphi S = 1$, so daß*

$$\log \det \Delta_\varphi > C$$

gilt.

Beweis: Mit einer Konstante C_1 folgt aus Lemma 3.1.7 und Lemma 3.1.3 für $\varphi \in C^\infty(S)$ mit $\mathrm{vol}_\varphi S = 1$

$$\left|\left(K_0, \varphi - ⨍_0 \varphi\right)_0\right| \leq C_1 \left(\left\|\varphi - ⨍_0 \varphi\right\|_{L^2(S,g)} + \|D\varphi\|_{L^2(S,g)}\right).$$

Daraus folgt mit der Poincaré–Ungleichung (3.1.7) mit einer Konstante C_2, die nicht von φ abhängt

$$|(K_0, \varphi)_0| \leq C_2 \left(\|D\varphi\|_{L^2_0(S,g)} + ⨍_0 \varphi\right).$$

Mit von φ unabhängigen Konstanten C_3 und C_4 und

$$R_g(\varphi) := \frac{1}{6} \sum_{p \in \Sigma} \varphi(p) \left(N(p) - N(p)^{-1}\right)$$

folgt aus Theorem 2.4.6

$$\begin{aligned}
&\log\det\Delta_\varphi - \log\det\Delta_0 \\
&= -\frac{1}{12\pi}\left\|D\varphi\right\|^2_{L^2(S,g)} - \frac{1}{6\pi}\left(K_0,\varphi\right)_0 + R_g\left(\varphi\right) \\
&\geq -\frac{1}{12\pi}\left(\left\|D\varphi\right\|^2_{L^2(S,g)} + 2C_3\left\|D\varphi\right\|_{L^2(S,g)} + C_4 ⨍_0 \varphi\right) + R_g\left(\varphi\right) \qquad (3.1.24)\\
&= -\frac{1}{12\pi}\left(\left\|D\varphi\right\|_{L^2(S,g)} + C_3\right)^2 - \frac{C_4}{12\pi}⨍_0 \varphi + \frac{C_3^2}{12\pi} + R_g\left(\varphi\right) \\
&\geq -\frac{1}{12\pi}\left(\left\|D\varphi\right\|_{L^2(S,g)} + C_3\right)^2 + R_g\left(\varphi\right),
\end{aligned}$$

weil aus der Jensenschen Ungleichung

$$1 = \mathrm{vol}_\varphi S = \int\limits_S e^{2\varphi}\,\mathrm{dvol}_0 \geq e^{2\int_S \varphi\,\mathrm{dvol}_0} = e^{2 ⨍_0 \varphi}$$

folgt, womit wir

$$⨍_0 \varphi \leq 0$$

erhalten.

Wegen Lemma 3.1.17 gibt es zu $p \in \Sigma$ mit $N\left(p\right) \geq 2$ und $\widetilde{C} > 0$ ein $\psi \in C^\infty\left(S\right)$ mit

$$\Sigma \cap \operatorname{supp}\psi = \{p\}$$

sowie

$$\left\|D\psi\right\|_{L^2(S,g)} + \left\|\psi\right\|_{L^2(S,g)} \leq 1$$

und $\psi\left(p\right) \geq \widetilde{C}$. Wir setzen

$$\varphi := \psi - \frac{1}{2}\log\mathrm{vol}_\psi S.$$

Dann gilt $\mathrm{vol}_\varphi S = 1$. Mit [KW], Formel (3.5) gilt

$$\frac{1}{2}\left|\log\mathrm{vol}_\psi S\right| \leq C_5$$

mit einer geeigneten Konstante C_5, die nicht von $\widetilde{C}$ und φ abhängt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left\|D\varphi\right\|_{L^2(S,g)} + \left\|\varphi\right\|_{L^2(S,g)} &\leq \left\|D\psi\right\|_{L^2(S,g)} + \left\|\psi\right\|_{L^2(S,g)} + \frac{1}{2}\left|\log\mathrm{vol}_\psi S\right| \\
&\leq 1 + C_5.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\varphi(p) = \psi(p) - \frac{1}{2} \log \mathrm{vol}_{\psi} S \geq \widetilde{C} - C_5.$$

Wir erhalten mit Formel (3.1.24)

$$\begin{aligned} &\log \det \Delta_{\varphi} - \log \det \Delta_0 \\ &\geq -\frac{1}{12\pi} (1 + C_3)^2 + \frac{1}{6} \left(\widetilde{C} - C_5 \right) \left(N(p) - N(p)^{-1} \right) \\ &\qquad - \frac{1}{6} C_5 \sum_{q \in \Sigma \setminus \{p\}} \left(N(q) - N(q)^{-1} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

$\boxed{3.1.18}$

3.2 Die uniformisierte Metrik bei singulären Punkten

In Abschnitt 3.1 haben wir für gewisse Flächen gezeigt, daß sich ihre Metrik konform auf konstante Krümmung transformieren läßt. Es ist daher interessant zu untersuchen, wie sich diese so entstehende Metrik in der Nähe von Singularitäten verhält. Wir wollen in diesem Abschnitt die Klasse der dabei auftretenden Metriken näher beschreiben.

3.2.1 Definition: *Sei W eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, versehen mit einer glatten Riemannschen Metrik σ_W. Eine Metrik σ auf $\mathbb{R}_+^* \times W$ heißt Warped Product, falls sie die Form*

$$\sigma = dr^2 + f(r)^2 \sigma_W$$

hat, wobei dr^2 die Standardmetrik von $\mathbb{R}$ ist, $f \in C^{\infty}((0, \infty), (0, \infty))$.

Wir betrachten (S, g) mit $C_S(g) \leq 0$. $\varphi \in C^{\infty}(S)$ sei die in Theorem 3.1.15 konstruierte Funktion, die eine Metrik

$$g_{\varphi} = e^{2\varphi} g$$

konstanter Krümmung -1 bzw. 0 auf S induziert.

3.2.2 Theorem: *Falls $C_S(g) < 0$ gilt, dann gibt es zu jedem Punkt $p \in \Sigma$ eine Umgebung $U \ni p$ in S und eine Isometrie*

$$i : (U \setminus \{p\}, g_{\varphi}) \to \left(i(U \setminus \{p\}) \subset \mathbb{R}_+^* \times S^1, g_N := dx^2 + N^2 (\sinh x)^2 d\vartheta^2 \right).$$

Dabei bezeichnet N die Multiplizität der Singularität von S bei p.

3.2.3 Bemerkung: Aus Theorem 3.2.2 folgt, daß g_φ in der Nähe von Singularitäten ein Warped Product ist.

Es ist zu beachten, daß i eine Isometrie auf $U \setminus \{p\}$ und nicht auf ganz U ist.

Zum Beweis von Theorem 3.2.2 benötigen wir einige Vorüberlegungen. Zunächst führen wir den Begriff des Längenraums ein und betrachten einige Eigenschaften spezieller hyperbolischer Flächen, die wir später benötigen werden.

3.2.4 Definition: ([Gr], Definition 1.7) *Ein metrischer Raum* (X, dist) *heißt ein Längenraum, wenn der Abstand* $\operatorname{dist}(x_1, x_2)$ *von je zwei Punkten* x_1, $x_2 \in X$ *durch das Infimum der Längen aller* x_1 *und* x_2 *verbindenden Kurven in* X *gegeben ist. Dabei ist die Länge einer Kurve*

$$c : I \to X$$

als rektifizierte Länge

$$l(c) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \operatorname{dist}(c(t_{i-1}), c(t_i)) \,\middle|\, t_i \in I \text{ für } i = 0, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N},\right.$$
$$\left. t_0 < t_1 < \ldots < t_n \right\}$$

definiert. I *bezeichnet ein Intervall.*

3.2.5 Definition: ([Gr], Definition 1.9) *Sei* (X, dist) *ein Längenraum. Eine Kurve*

$$c : I \to X$$

heißt minimierende Geodätische, falls für alle t_1, $t_2 \in I$, $t_1 < t_2$

$$l(c\,|[t_1, t_2]) = \operatorname{dist}(c(t_1), c(t_2))$$

gilt. I *bezeichnet ein Intervall.* $l(c\,|[t_1, t_2])$ *steht für die rektifizierte Länge von* $c\,|[t_1, t_2]$, *wie in Definition 3.2.4.* c *heißt Geodätische, falls es zu jedem* $t \in I$ *ein* $\varepsilon > 0$ *gibt, so daß*

$$c|\, I \cap [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$$

eine minimierende Geodätische ist.

3.2.6 Theorem: ([Gr], Theorem 1.10 (ii)) *Sei* (X, dist) *ein vollständiger lokalkompakter Längenraum. Dann existiert zu je zwei Punkten aus* X *eine verbindende minimierende Geodätische.*

3.2.7 Lemma: *Sei U eine offene zweidimensionale orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, versehen mit einer glatten Riemannschen Metrik σ. $V \subset U$ sei eine einfach zusammenhängende zweidimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit stückweise glattem Rand ∂V. Dann gibt es eine einfach zusammenhängende kompakte Untermannigfaltigkeit $W \subset U$ mit stückweise geodätischem Rand ∂W, so daß*

$$V \subset W \subset U$$

gilt.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir die ε–Hülle $V_{\leq \varepsilon}$ um V

$$V_{\leq \varepsilon} := \{p \in U \,|\, \mathrm{dist}\,(p, V) \leq \varepsilon\}\,.$$

Wegen der Kompaktheit von V können wir

$$V_{\frac{\varepsilon}{2}} := \left\{p \in U \,\middle|\, \mathrm{dist}\,(p, V) = \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

für hinreichend kleines ε beliebig gut durch eine stückweise geodätische Kurve approximieren. Das bedeutet, daß es zu jedem $\delta > 0$ eine geschlossene Kurve

$$c_\delta : [0, 1) \to U$$

gibt, die folgende Eigenschaften erfüllt. Für jedes $t \in [0, 1)$ gilt

$$\mathrm{dist}\left(c_\delta\,(t)\,, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\right) < \delta.$$

Zu jedem $p \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$ gibt es ein $t \in [0, 1)$, mit

$$\mathrm{dist}\,(c_\delta\,(t)\,, p) < \delta.$$

Mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ liegt die zugehörige Kurve c_δ vollständig in $V_{\leq \varepsilon} \setminus V$. Wir wählen nun W als die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche.

$\boxed{3.2.7}$

3.2.8 Lemma: *Sei (U, σ) wie in Lemma 3.2.7 gewählt. Zusätzlich nehmen wir an, daß (U, σ) hyperbolisch ist, also konstante Krümmung -1 hat. $W \subset U$ sei eine einfach zusammenhängende kompakte Untermannigfaltigkeit mit stückweise geodätischen Rand. Dann gibt es zu W eine endliche Partitionierung*

$$\{W_j\}_{1 \leq j \leq j_0} \subset W$$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Alle* W_j, $1 \leq j \leq j_0$ *sind einfach zusammenhängende konvexe geodätische Polygone. Konvex bedeutet hier, daß die Innenwinkel der Ecken* $\leq \pi$ *sind.*
- *Es gilt*

$$W = \bigcup_{1 \leq j \leq j_0} W_j.$$

- *Für* $1 \leq k,\, l \leq j_0$, $k \neq l$ *gilt*

$$W_k \cap W_l \subset \partial W_k \cup \partial W_l.$$

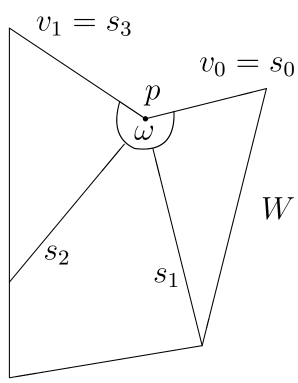

Abbildung 3.1

Beweis: Sei p eine Ecke von W mit angrenzenden Geodätischen v_0 und v_1, die sich mit Innenwinkel $\omega > \pi$ schneiden. Dann findet man endlich viele ω_i, $1 \leq i \leq i_0$ mit

$$0 < \{\omega_i\}_{1 \leq i \leq i_0} \leq \pi,$$

so daß

$$\omega = \sum_{i=1}^{i_0} \omega_i$$

gilt. Zu jedem ω_i konstruieren wir nun eine Geodätische s_i in W durch p, so daß der Winkel zwischen s_{i-1} und s_i, $1 \leq i \leq i_0$ gerade ω_i beträgt. Dabei sei $s_0 := v_0$ und $s_{i_0} := v_1$ (vgl. Abbildung 3.1). Ohne Einschränkung seien die s_i nach Bogenlänge so parametrisiert, daß jeweils $s_i(0) = p$ und für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$

$$s_i([0, \varepsilon]) \subset W$$

gilt. Da (W, σ) einfach zusammenhängend und hyperbolisch vorausgesetzt wurde, gibt es zu jedem i ein $t_{i,0} > 0$, so daß

$$s_i(t_{i,0}) \in \partial W$$

und für alle t, $0 < t < t_{i,0}$

$$s_i(t) \in W \setminus \partial W$$

gilt. Sonst müßte es eine geschlossene, nicht konstante Geodätische in W geben, was aufgrund der Voraussetzungen aber unmöglich ist. Auch der

Fall, daß $s_i(t)$ für $t \to \infty$ gegen einen Punkt $q \in W \setminus \partial W$ konvergiert ist wegen der Annahme der Hyperbolizität ausgeschlossen. Die so konstruierten s_i zerlegen W in i_0 einzelne Teilflächen. Jeder Punkt $s_i(t_{i,0})$ liegt entweder auf einer Ecke oder einer Kante von W. Im ersten Fall entstehen in den zugehörigen Teilstücken von W Innenwinkel, die kleiner sind als der ursprüngliche Innenwinkel von W bei $s_i(t_{i,0})$. Im zweiten Fall entstehen Ecken der entsprechenden Teilstücke mit Innenwinkeln $\leq \pi$. Durch iterierte Anwendung dieses Verfahrens auf die entstehenden Teilstücke erhält man die gewünschte Zerlegung. Da W nur endlich viele Ecken hat, terminiert dieser Prozeß.

$\boxed{3.2.8}$

3.2.9 Satz: *Sei (U, σ) wie in Lemma 3.2.8 gewählt. $V \subset U$ sei eine einfach zusammenhängende zweidimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit mit Rand, deren Rand ∂V stückweise glatt ist. Dann gibt es eine lokal isometrische Immersion*

$$\imath : V \to \mathbb{H}.$$

Beweis: Wir konstruieren zu V ein W wie in Lemma 3.2.7. Gemäß Lemma 3.2.8 kann W in endlich viele einfach zusammenhängende konvexe geodätische Polygone $\{W_j\}_{1 \leq j \leq j_0}$ zerlegt werden. Für jedes dieser W_j gibt es gemäß [B], Korollar 1.4.3 eine orientierungserhaltende isometrische Einbettung

$$i_j : W_j \hookrightarrow \mathbb{H}.$$

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß für $1 \leq k, l \leq j_0$

$$i_k | W_k \cap W_l = i_l | W_k \cap W_l$$

gilt. Dies läßt sich wie folgt begründen. Wir nehmen an, daß die W_j so durchnumeriert sind, daß für $j > 1$

$$W_j \cap \bigcup_{k<j} W_k \neq \emptyset$$

gilt und $\bigcup_{k<j} W_k$ einfach zusammenhängend ist. Dann betrachten wir

$$X_j := \bigcup_{k \leq j} i_k(W_k).$$

Da die Innenwinkelsumme der jeweiligen Ecken der einzelnen W_j, die in einem im Inneren von W liegenden Punkt angrenzen gleich 2π ist, können wir i_{j+1} so wählen, daß

$$X_j \cap i_{j+1}(W_{j+1}) \subset \partial X_j \cup i_{j+1}(\partial W_{j+1})$$

gilt. Wegen des einfachen Zusammenhangs von $\bigcup_{k\leq j} W_k$ ist $\partial \bigcup_{k\leq j} W_k$ zusammenhängend. Das bedeutet, daß es genau eine Möglichkeit gibt, W_{j+1} vermöge i_{j+1} an X_j *anzukleben*, so daß für $1 \leq k < j$

$$i_k| \, W_k \cap W_j = i_j| \, W_k \cap W_j$$

gilt. Induktiv erhalten wir so alle Einbettungen i_j mit den gewünschten Eigenschaften.

Nun setzten wir

$$i(q) := i_j(q) \quad \text{für} \quad q \in W_j,\ 1 \leq j \leq j_0.$$

Dann gilt

$$i(W) = X_{j_0}.$$

$i : W \to \mathbb{H}$ ist eine Immersion und wir wählen

$$\imath := i| \, V.$$

$\boxed{3.2.9}$

Wir kehren zu den speziellen Voraussetzungen von Theorem 3.2.2 zurück und werden die dort verwendete Notation beibehalten, ohne sie neu einzuführen.

3.2.10 Lemma:

$$U \cup \partial U \subset S,$$

versehen mit der Abstandsfunktion

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}_\varphi : (U \cup \partial U)^2 &\to \mathbb{R}_+, \\ (x_1, x_2) &\mapsto \inf \Big\{ l_\varphi(c) \ \Big| \ c : (0,1) \to U \setminus \{p\}, \\ &\qquad \lim_{t\to 0} c(t) = x_1,\ \lim_{t\to 1} c(t) = x_2 \Big\} \end{aligned}$$

ist ein vollständiger lokalkompakter Längenraum im Sinne von Definition 3.2.4. $l_\varphi(c)$ bezeichnet die rektifizierte Länge von c bezüglich der Metrik g_φ.

Beweis: Wegen Lemma 3.1.3 ist klar, daß $(U \cup \partial U, \mathrm{dist}_\varphi)$ ein metrischer Raum und damit ein Längenraum gemäß Definition 3.2.4 ist. Da Vollständigkeit und Lokalkompaktheit unter quasiisometrischer Variation der Metrik invariant sind, folgen diese Eigenschaften direkt aus Lemma 3.1.3, da $(U \cup \partial U, \mathrm{dist}_\sigma)$ mit σ wie auf S. 71 vollständig und lokalkompakt ist.

$\boxed{3.2.10}$

3.2.11 Korollar: *Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U existiert für jedes $u \in U \setminus \{p\}$ bezüglich g_φ eine minimierende Geodätische endlicher Länge*

$$s : (0,1] \to U \setminus \{p\}\,,\ \lim_{t \to 0} s\,(t) = p,\ s\,(1) = u.$$

Beweis: Dies ist eine direkte Folgerung aus Theorem 3.2.6 sowie Lemma 3.2.10.

$\boxed{3.2.11}$

3.2.12 Korollar: *Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U existiert für zwei Punkte $u,\ v \in U$ eine minimierende Geodätische*

$$s : [0,1] \to U,\ s\,(0) = u,\ s\,(1) = v.$$

Falls s durch p läuft, also falls es ein $t \in [0,1]$ gibt mit $s\,(t) = p$, dann sind $s\,|[0,t)$ und $s\,|(t,1]$ Geodätische in $U \setminus \{p\}$ endlicher Bogenlänge bezüglich g_φ. Andernfalls gilt dies bereits für s.

Beweis: Dies folgt aus Theorem 3.2.6, Lemma 3.2.10 und Korollar 3.2.11.

$\boxed{3.2.12}$

3.2.13 Satz: *Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U gibt es zu $u \in U$ — bis auf Parametrisierung — genau eine verbindende Geodätische von u und p, die vollständig in U liegt.*

Beweis: Gemäß Korollar 3.2.11 gibt es eine minimierende Geodätische s, die u und p verbindet. Wir nehmen an, es gäbe eine weitere verbindende Geodätische r in U, die auch nach Umparametrisierung von s verschieden ist. Wir dürfen annehmen, daß

$$p = s\,(0) = r\,(0)$$

und

$$u = s\,(1) = r\,(1)$$

gilt. Den Winkel zwischen s und r bei u, gemessen im Inneren des von im s und im r eingeschlossenen Gebietes, bezeichnen wir mit ω.

Zu einem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ betrachten wir

$$S_\varepsilon := \{x \in U \mid \mathrm{dist}_\varphi(x,p) = \varepsilon\} \subset U.$$

c_ε sei eine geschlossene injektive Kurve in U mit

$$\mathrm{im}\, c_\varepsilon = S_\varepsilon.$$

Wir betrachten auf S eine glatte Metrik σ wie auf S. 71. $\sigma| U$ ist isometrisch zur euklidischen Metrik. Da gemäß Lemma 3.1.3 g_φ und σ quasiisometrisch sind, gilt für die Längen l_φ bezüglich g_φ und l_σ bezüglich σ von c_ε

$$l_\varphi(c_\varepsilon) \leq const \cdot l_\sigma(c_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \tag{3.2.1}$$

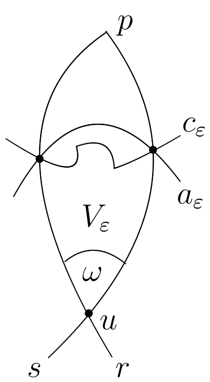

Abbildung 3.2

Andererseits konstruieren wir ein V_ε wie folgt. Seien $t_{s,\varepsilon}$ und $t_{r,\varepsilon} \in (0,1)$ so gewählt, daß

$$l_\varphi(s \mid (0, t_{s,\varepsilon})) = l_\varphi(r \mid (0, t_{r,\varepsilon})) = \varepsilon$$

gilt, und sei c_ε wie vorher. Das heißt, c_ε verbindet die Punkte $s(t_{s,\varepsilon})$ und $r(t_{r,\varepsilon})$. Ohne Einschränkung dürfen wir

$$s(t_{s,\varepsilon}) = c_\varepsilon(0)$$

und

$$r(t_{r,\varepsilon}) = c_\varepsilon(1)$$

annehmen. Das von $s \mid [t_{s,\varepsilon}, 1]$, $r \mid [t_{r,\varepsilon}, 1]$ und $c_\varepsilon| [0,1]$ eingeschlossene Gebiet bezeichnen wir mit V_ε (vgl. Abbildung 3.2). Die Parametrisierung von c_ε kann so gewählt werden, daß p nicht in V_ε liegt.

Wir wählen eine glatte Kurve a_ε, die $s(t_{s,\varepsilon})$ und $r(t_{r,\varepsilon})$ verbindet, so daß V_ε im von $s \mid [t_{s,\varepsilon}, 1]$, $r \mid [t_{r,\varepsilon}, 1]$ und a_ε eingeschlossenen Gebiet — das wir ab sofort $\widetilde{V}_\varepsilon$ nennen — liegt, nicht aber p. Das ist immer möglich, da c_ε stetig ist und beliebig gut durch eine glatte Kurve approximiert werden kann.

Nach Satz 3.2.9 kann $\widetilde{V}_\varepsilon$ lokal isometrisch in $\mathbb{H}$ immersiert werden,

$$\widetilde{\imath}_\varepsilon : \widetilde{V}_\varepsilon \to \mathbb{H}.$$

Dann ist auch

$$\widehat{\imath}_\varepsilon := \widetilde{\imath}_\varepsilon| \; V_\varepsilon : V_\varepsilon \to \mathbb{H}$$

eine lokal isometrische Immersion.

Die Bilder von $s\,|\,[t_{s,\varepsilon}, 1]$ und $r\,|\,[t_{r,\varepsilon}, 1]$ unter $\widehat{\imath}_\varepsilon$ sind Geodätische in $\mathbb{H}$, die sich bei $\widehat{\imath}_\varepsilon(u)$ mit Winkel ω schneiden. Daher gibt es eine Konstante $L > 0$, die nicht von ε abhängt, so daß

$$L \leq \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}\left(\widehat{\imath}_\varepsilon \circ s\left(t_{s,\varepsilon}\right), \widehat{\imath}_\varepsilon \circ r\left(t_{r,\varepsilon}\right)\right) \leq l_{\mathbb{H}}\left(\widehat{\imath}_\varepsilon \circ c_\varepsilon \,|\, [0,1]\right) = l_\varphi\left(c_\varepsilon \,|\, [0,1]\right)$$

gilt. Das ist ein Widerspruch zu Formel (3.2.1).

$\boxed{3.2.13}$

3.2.14 Satz: *Gegebenenfalls nach Verkleinerung von U gibt es eine endliche offene Überdeckung*

$$\{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0} \subset U \setminus \{p\}$$

von $U \setminus \{p\}$, so daß jedes dieser V_l die folgenden Eigenschaften erfüllt.

- *V_l ist einfach zusammenhängend.*
- *$\partial V_l \setminus \partial U$ besteht aus Geodätischen, die gegen p laufen.*
- *Zu V_l gibt es einen Homöomorphismus*

  $$j_{V_l} : V_l \cup \{p\} \to j_{V_l}\left(V_l \cup \{p\}\right) \subset \mathbb{H},$$

  so daß

  $$j_{V_l} | \, V_l : \left(V_l, g_\varphi\right) \to j_{V_l}\left(V_l\right) \subset \mathbb{H}$$

  eine Isometrie ist.

Beweis: Wir betrachten ein $q \in U \setminus \{p\}$ mit

$$\mathrm{dist}_\varphi\left(q, p\right) = \varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$. s sei die minimierende verbindende Geodätische von p und q. Gemäß Satz 3.2.13 ist diese bis auf Parametrisierung eindeutig bestimmt. r sei eine Geodätische durch q, die senkrecht auf s steht. Für ein $x \in \mathrm{im}\, r$, $x \notin \mathrm{im}\, s$ betrachten wir die minimierende verbindende Geodätische f von x und p. Sei nun $q' \in \mathrm{im}\, s$ mit

$$0 < \mathrm{dist}_\varphi\left(q', p\right) < \mathrm{dist}_\varphi\left(q, p\right)$$

und r' die Geodätische durch q', die auf s senkrecht steht. Wir bezeichnen das von s, f und r eingeschlossene Gebiet in $U \setminus \{p\}$ mit V und nehmen an, daß alle Geodätischen mit Bogenlänge parametrisiert sind. V ist präkompakt.

Nun gibt es ein

$$z \in \operatorname{im} r' \cap \operatorname{im} f.$$

Falls es kein solches z gäbe, dann wären a priori vier Fälle denkbar. Entweder müßte $r'(t)$ für $t \to \infty$ gegen einen Punkt

$$v \in V \setminus \partial V$$

konvergieren, was nicht möglich ist. Falls es einen solchen Konvergenzpunkt v gäbe, dann könnte man eine Umgebung um v wählen, diese isometrisch in $\mathbb{H}$ einbetten und dort eine mit Bogenlänge parametrisierte Geodätische finden, die für $t \to \infty$ gegen das Bild von v konvergiert. Das ist aber unmöglich. Ein anderer Fall, den man ausschließen muß, ist, daß r' einen Schnittpunkt mit r oder mit s (außer in q') hat. Solche Schnittpunkte kann es nicht geben, da sich sonst ein Widerspruch wegen der Winkelsumme in hyperbolischen Polygonen ergäbe. Ein weiterer Fall ist, daß r' durch p läuft, was einen Widerspruch zu Satz 3.2.13 darstellt. Falls $r'(t)$ für $t \to \infty$ nicht konvergiert, aber r' auch keinen Schnittpunkt mit r oder s (außer in q') hat, dann gibt es eine geschlossene, nicht konstante Geodätische in $V \setminus \partial V$, was wegen der Voraussetzung, daß g_φ hyperbolisch ist ausgeschlossen ist. Daher muß es einen Schnittpunkt von r' und f geben.

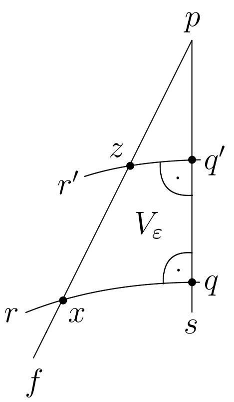

Abbildung 3.3

V_ε sei das von s, f, r und r' eingeschlossene Gebiet, wobei q' so gewählt wurde, daß

$$\operatorname{dist}_\varphi(q', p) = \varepsilon$$

gilt (vgl. Abbildung 3.3). Nach Konstruktion ist V_ε ein konvexes hyperbolisches Viereck mit geodätischen Kanten und kann daher gemäß [B], Korollar 1.4.3 isometrisch in $\mathbb{H}$ eingebettet werden. Für $\varepsilon \to 0$ kann diese Einbettung fortgesetzt werden zu einer isometrischen Einbettung

$$j_V : V \hookrightarrow \mathbb{H},$$

die wiederum durch Stetigkeit zu einem Homöomorphismus

$$j_V : V \cup \{p\} \to j_V(V \cup \{p\}) \subset \mathbb{H},$$

fortgesetzt werden kann.

Wir betrachten nun für alle Wahlen von q mit

$$\operatorname{dist}_{\varphi}(q,p) > \varepsilon$$

mit $\varepsilon > 0$, ε hinreichend klein und x solche Flächen $V = V(q,x)$ und die zugehörigen Abbildungen j_V. Sei

$$S_{\varepsilon} := \{u \in U \,|\, \operatorname{dist}_{\varphi}(u,p) = \varepsilon\}\,.$$

c_{ε} sei eine geschlossene injektive Kurve in U mit

$$\operatorname{im} c_{\varepsilon} = S_{\varepsilon}.$$

Wegen Lemma 3.1.3 gilt $l_{\varphi}(c_{\varepsilon}) < \infty$. Daher ist S_{ε} kompakt. Da für jedes V

$$l_{\varphi}(c_{\varepsilon}|\, V) > 0$$

gilt, gibt es eine endliche Teilüberdeckung

$$\{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0} \subset U \setminus \{p\}$$

von S_{ε}. Mit Satz 3.2.13 sieht man, daß

$$\{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0} \subset U \setminus \{p\}$$

auch eine Überdeckung von

$$S_{\leq \varepsilon} := \{u \in U \,|\, \operatorname{dist}_{\varphi}(u,p) \leq \varepsilon\}$$

ist. Wir haben damit eine endliche Überdeckung von S_{ε} konstruiert, die alle gewünschten Eigenschaften erfüllt. Ohne Einschränkung können wir U auf S_{ε} verkleinern.

$\boxed{3.2.14}$

Wir betrachten

$$\{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0} \subset U \setminus \{p\}$$

wie in Satz 3.2.14 und wählen auf $\mathbb{H}$ Polarkoordinaten (x, ϑ), so daß sich die Metrik von $\mathbb{H}$ zu

$$g_{\mathbb{H}} = dx^2 + (\sinh x)^2\, d\vartheta^2$$

ergibt. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß für jedes l, $1 \leq l \leq l_0$

$$j_{V_l}(p) = 0 \in \mathbb{H}$$

gilt und daß $\{(x,0)|\, x \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{H}$ und $j_{V_l}(V_l)$ disjunkt sind.

3.2.15 Lemma: *Für jede Konstante $A \geq 1$ ist*

$$\begin{aligned} i_V : (j_V(V), g_{\mathbb{H}}) &\to \left(i_V \circ j_V(V) \subset \mathbb{R}_+^* \times S^1, g_A := dx^2 + A^2 (\sinh x)^2 \, d\vartheta^2\right) \\ (x, \vartheta) &\mapsto \left(x, A^{-1}\vartheta\right) \end{aligned}$$

mit $V \in \{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0}$ eine Isometrie. Dabei ist der Ausdruck $A^{-1}\vartheta$ als Abbildung von $[0, 2\pi)$ in sich zu verstehen.

Beweis: Dies folgt aus der Tatsache, daß gerade

$$g_A = i_V^* g_{\mathbb{H}}$$

gilt.

$\boxed{3.2.15}$

3.2.16 Lemma: *Für l, $1 \leq l \leq l_0$ bezeichnen wir den Öffnungswinkel von $j_{V_l}(V_l) \subset \mathbb{H}$ bei*

$$0 = j_{V_l}(p) \in \mathbb{H}$$

mit ω_l. Mit der Notation von Lemma 3.2.15 und

$$A := \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{l_0} \omega_l \tag{3.2.2}$$

gibt es Abbildungen

$$\begin{aligned} \{b_{V_l}\}_{1 \leq l \leq l_0} : \mathbb{R}_+^* \times S^1 &\to \mathbb{R}_+^* \times S^1, \\ (x, \vartheta) &\mapsto (x, \vartheta + z_{V_l}) \end{aligned}$$

für geeignete $z_{V_l} \in [0, 2\pi)$, so daß für V_k, $V_l \in \{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0}$ auf $V_k \cap V_l$

$$b_{V_k} \circ i_{V_k} \circ j_{V_k} = b_{V_l} \circ i_{V_l} \circ j_{V_l}$$

gilt. Die Abbildung

$$\begin{aligned} i : (U \setminus \{p\}, g_\varphi) &\to (i(U \setminus \{p\}), g_A), \\ \{V_l\}_{1 \leq l \leq l_0} \ni V \ni q &\mapsto b_V \circ i_V \circ j_V(q) \end{aligned}$$

ist eine Isometrie.

Beweis: Wir setzen $z_{V_1} := 0$ und wählen für $l > 1$ induktiv z_{V_l} so, daß

$$b_{V_l} \circ i_{V_l} \circ j_{V_l}(V_{l-1} \cap V_l) = b_{V_{l-1}} \circ i_{V_{l-1}} \circ j_{V_{l-1}}(V_{l-1} \cap V_l)$$

gilt. A wurde so konstruiert, daß wir

$$b_{V_{l_0}} \circ i_{V_{l_0}} \circ j_{V_{l_0}} (V_{l_0} \cap V_1) = b_{V_1} \circ i_{V_1} \circ j_{V_1} (V_{l_0} \cap V_1)$$

erhalten.

Daß i eine Isometrie ist folgt, wenn man berücksichtigt, daß gemäß Satz 3.2.14 und Lemma 3.2.15 $i_{V_l} \circ j_{V_l}$ für jedes l, $1 \leq l \leq l_0$ eine Isometrie ist. Auch alle Abbildungen b_{V_l} sind Isometrien.

$\boxed{3.2.16}$

3.2.17 Lemma: *Für A wie in Formel (3.2.2) gilt $A = N$.*

Beweis: (S, g) mit $g \in \mathcal{G}(S)$ ist in der Nähe einer Singularität der Multiplizität N die konforme Variation der N–fachen Überlagerung der punktierten Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$, versehen mit der Standardmetrik, wie man mit Definition 1.2.1 sieht. Da Winkel unter konformer Variation der Metrik mit einer positiven, von 0 weg beschränkten Funktion — hier $e^{2\varphi}$ — invariant sind, was direkt aus Definition 1.2.1 folgt, gilt mit den Bezeichnungen von Lemma 3.2.16

$$\sum_{l=1}^{l_0} \omega_l = 2\pi N.$$

$\boxed{3.2.17}$

Beweis von Theorem 3.2.2: Die Aussage von Theorem 3.2.2 ergibt sich aus den Lemmata 3.2.16 und 3.2.17.

$\boxed{3.2.2}$

3.2.18 Theorem: *Sei $C_S(g) = 0$. φ bezeichnet wiederum die in Theorem 3.1.15 konstruierte Funktion. Dann gibt es zu jedem Punkt $p \in \Sigma$ eine Umgebung $U \ni p$ in S und eine Isometrie*

$$i : (U \setminus \{p\}, g_\varphi) \to \left(i(U \setminus \{p\}) \subset \mathbb{R}_+^* \times S^1, g_N := dx^2 + N^2 x^2 d\vartheta^2\right).$$

N steht für die Multiplizität der Singularität bei p.

Beweis: Der Beweis von Theorem 3.2.18 kann völlig analog zum Beweis von Theorem 3.2.2 geführt werden. Es müssen lediglich jeweils die hyperbolische Halbebene $\mathbb{H}$ durch die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$, $\sinh x$ durch x und Krümmung -1 durch Krümmung 0 ersetzt werden.

$\boxed{3.2.18}$

3.2.19 Bemerkung: Die Aussagen der Theoreme 3.2.2 und 3.2.18 werden bis auf das Teilresultat aus Lemma 3.2.17 unabhängig in [J], Theorem 3.4 gezeigt.

3.2.20 Satz: *Sei $p \in \Sigma$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Die geodätischen Kreise*

$$W_\varepsilon(g_\psi) := \{q \in S \mid \mathrm{dist}_\psi(p,q) = \varepsilon\}$$

und

$$W_\varepsilon(g) := \{q \in S \mid \mathrm{dist}_g(p,q) = \varepsilon\},$$

versehen mit der von (S, g_ψ) bzw. (S,g) induzierten Metrik sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit glatter Metrik.

Beweis: Die Aussage für $W_\varepsilon(g_\psi)$ folgt direkt aus Theorem 3.2.2 bzw. Theorem 3.2.18. Die Aussage für $W_\varepsilon(g)$ folgt aus Theorem 3.2.2 bzw. Theorem 3.2.18 in Verbindung mit Theorem 3.1.12.

$\boxed{3.2.20}$

3.3 Der Fall $C_S(g) > 0$

3.3.1 Satz: ([Tro1], Theorem 1(2)) *Sei (W,σ) eine Riemannsche Fläche konstanter Krümmung K. (W,σ) besitzt zwei konische Singularitäten der Multiplizitäten N_1 und N_2. W sei isomorph zu S^2. Dann gilt $N_1 = N_2$.*

Mit Satz 3.3.1 sieht man, daß, falls $C_S(g) > 0$ gilt, es auf $\overset{\circ}{S}$ im allgemeinen keine Metrik g_ψ gibt, die zu g konform äquivalent ist und konstante Krümmung besitzt. Sei etwa $\chi(S) = 2$ und (S,g) besitze nur zwei Singularitäten der Multiplizitäten $N_1 \geq 1$ und $N_2 \geq 1$, $N_1 \neq N_2$. Es gilt also

$$C_S(g) = N_1 + N_2 > 0.$$

Aus Satz 3.3.1 folgt nun, daß es keine zu g konform äquivalente Metrik konstanter Krümmung gibt.

Gemäß dem Satz von Chow ([GH], S. 167) können algebraische Kurven konstruiert werden, die isomorph zu S^2 sind und genau zwei Singularitäten der Multiplizitäten N_1 und N_2, $N_1 \neq N_2$ besitzen.

Literaturverzeichnis

[BL1] **J. Brüning, M. Lesch:** *Kähler–Hodge Theory for Conformal Complex Cones.* Geom. Funct. Anal., Vol. 3, S. 439–473, 1993

[BL2] ______**:** *On the Spectral Geometry of Algebraic Curves.* J. Reine Angew. Math., Vol. 474, S. 25–66, 1996

[BS1] **J. Brüning, R. Seeley:** *Regular Singular Asymptotics.* Adv. in Math., Vol. 58, S. 133–148, 1985

[BS2] ______**:** *The Resolvent Expansion for Second Order Regular Singular Operators.* J. Funct. Anal., Vol. 73, S. 369–429, 1987

[B] **P. Buser:** *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1992

[dC1] **M. P. do Carmo:** *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1983

[dC2] ______**:** *Riemannian Geometry.* Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1992

[D] **A. Dold:** *Lectures on Algebraic Topology.* Classics in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995

[FK] **H. M. Farkas, I. Kra:** *Riemann Surfaces.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1992

[Fo2] **O. Forster:** *Analysis 2.* Vieweg, Braunschweig, 1977

[Fo3] ______**:** *Analysis 3.* Vieweg, Braunschweig, 3. Auflage, 1984

[Fu] **W. Fulton:** *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry.* Advanced Book Classics Series. Addison-Wesley, Redwood City CA, Menlo Park CA, Reading MA, 1989

[GT] **D. Gilbarg, N. S. Trudinger:** *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 224. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1983

[Gi] **P. B. Gilkey:** *Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem.* Publish or Perish, Wilmington, Delaware, 1984

[GH] **P. Griffiths, J. Harris:** *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 1978

[Gr] **M. Gromov:** *Structures métriques pur les variétés riemanniennes.* Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1981

[H] **R. Hartshorne:** *Algebraic Geometry.* Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 6. Auflage, 1993

[HT] **D. Hulin, M. Troyanov:** *Prescribing Curvature on Open Surfaces.* Math. Ann., Vol. 293, S. 277–315, 1992

[J] **C. M. Judge:** *On the Angular Moduli of Constant Curvature Surfaces with Conic Singularities.* Preprint, Stanford University, 1996

[KW] **J. L. Kazdan, F. W. Warner:** *Curvature Functions for Compact 2–Manifolds.* Ann. of Math., Vol. 99, S. 14–47, 1974

[L1] **M. Lesch:** *Deficiency Indices for Symmetric Dirac Operators of Manifolds with Conic Singularities.* Topology, Vol. 32, No. 3, S. 611–623, 1993

[L2] ______**:** *Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods.* Teubner–Texte zur Mathematik, Bd. 136. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1997

[M] **D. Mumford:** *Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties.* Classics in Mathematics. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Auflage, 1995

[OPS] **B. Osgood, R. Phillips, P. Sarnak:** *Extremals of Determinants of Laplacians.* J. Funct. Anal., Vol. 80, S. 148–211, 1988

[P1] **A. M. Polyakov:** *Quantum Geometry of Bosonic Strings.* Phys. Lett. B, Vol. 103, No. 3, S. 207–210, 1981

[P2] ______**:** *Quantum Geometry of Fermionic Strings.* Phys. Lett. B, Vol. 103, No. 3, S. 211–213, 1981

[RS1] **M. Reed, B. Simon:** *Functional Analysis.* Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I. Academic Press, San Diego, New York, Boston, 1980

[Ta] **M. E. Taylor:** *Pseudodifferential Operators.* Princeton University Press, Princeton, New Yersey, 1981

[Tre] **F. Treves:** *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels.* Academic Press, New York, London, 1967

[Tro1] **M. Troyanov:** *Metrics of Constant Curvature of a Sphere with Two Conical Singularities.* In: *Proceedings of the Third International Symposium on Differential Geometry (Peniscola, 1988)*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1410, S. 296–306. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1988

[Tro2] ______**:** *Prescribing Curvature on Compact Surfaces with Conical Singularities.* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 324, No. 2, S. 793–821, 1991

[Wi] **N. Wiener:** *Tauberian Theorems.* Ann. of Math., Vol. 32, S. 1–100, 1932

[Wo] **J. A. Wolf:** *Essential Self Adjointness for the Dirac Operator and Its Square.* Indiana Univ. Math. J., Vol. 22, No. 7, S. 611–640, 1973

Symbolverzeichnis

Häufig verwendete Symbole werden zusammen mit einer kurzen Erklärung aufgeführt. Bei Symbolen, die in der Arbeit eingeführt oder näher erläutert werden, wird die Seitenzahl ihres ersten Auftretens angegeben. Alle anderen werden zu Beginn der Liste in alphabetischer Ordnung wiedergegeben. Der Begriff *alphabetisch* muß hier allerdings großzügig interpretiert werden, da nicht in jedem Fall eine eindeutige Zuordnung möglich war. Ich habe mich bemüht, alle Symbole in dieses Verzeichnis aufzunehmen, die an mehreren Stellen der Arbeit auftauchen und nicht zum grundlegenden Standardrepertoire der Mathematik zählen.

T^*, T^*_φ	zu T adjungierter Operator (bezüglich der Metrik g_φ)
$\arg z$	Argument von $z \in \mathbb{C}$, $z = \lvert z\rvert \cdot e^{i \arg z}$
$\wedge$	äußeres Produkt
$\mathcal{L}(H)$	Menge der beschränkten linearen Operatoren auf H
$C^k(M)$, $C^k_0(M)$	Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen (mit kompaktem Träger) auf M, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\mathbb{1}_U$	charakteristische Funktion der Menge U
d	äußere Ableitung
$\mathcal{D}(T)$	Definitionsbereich des Operators T
Diff_k, $\mathrm{Diff}_{\leq k}$	Differentialoperatoren der Ordnung k bzw. $\leq k$
δ_x	Dirac–Maß im Punkt x
$\langle \mu, \nu \rangle$	duale Paarung der Funktionen $\mu \in H^k$ und $\nu \in H^{-k}$
$\chi(M)$	Eulercharakteristik von M
$\Gamma(x)$	Γ–Funktion, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$

∇f	Gradient der Funktion f
$\langle f, g\rangle$, (f, g)	punktweises und L^2–Skalarprodukt von f und g, $$(f,g) = \int \langle f, g\rangle$$
$\mathbb{H}$	hyperbolische Halbebene
i	imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
$\operatorname{im} f$, $\ker f$	Bild und Kern der Abbildung f
$\mathcal{L}(X)$	Raum der beschränkten Operatoren auf X
$L^p_{loc}(M)$, $L^p(M)$, $\Vert\,.\Vert_{L^p(M,\sigma)}$	Menge der (lokal) L^p–integrierbaren Funktionen auf M, zugehörige Norm bezüglich der Metrik σ
$\operatorname{ord} P$	Ordnung des Differentialoperators P
$\psi^* h$	Pullback der Abbildung ψ, angewandt auf h
$\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^*_+$	Menge der Zahlen $x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0, \geq 0, > 0$
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	Real– und Imaginärteil von $z \in \mathbb{C}$, $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$
$\mathcal{S}(\mathbb{R})$	Schwartz–Raum der glatten schnell fallenden Funktionen auf $\mathbb{R}$
$H^k_{loc}(M)$, $H^k(M)$, $\Vert\,.\,\Vert_{H^k(M)}$	(lokaler) L^2–Sobolev–Raum der Stufe k von Funktionen auf M, zugehörige Sobolev–Norm
$W^{k,p}(M)$, $\Vert\,.\,\Vert_{W^{k,p}(M)}$	L^p–Sobolev–Raum der Stufe k von Funktionen auf M, zugehörige Norm
$\operatorname{spec} T$	Spektrum des Operators T
$\operatorname{supp} f$	Träger von f
TM, T^*M	Tangential– und Kotangentialraum der Mannigfaltigkeit M
$\operatorname{tr}_{L^2(M,\sigma)}$	L^2–Spur auf M bezüglich der Metrik σ
$C_1(H)$, $\Vert\,.\,\Vert_{\mathrm{tr}}$	Menge der Spurklasseoperatoren auf H, Spurnorm
P^t	zum Differentialoperator P transponierter oder formal adjungierter Operator

$\mathcal{G}(S)$	Klasse von degenerierten Metriken auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit S, definiert auf S. 19
Σ	singulärer Ort, S. 19
$\mathring{S}$	Menge der regulären Punkte von S, $$\mathring{S} = S \setminus \Sigma,$$ S. 18
$N(p)$	Multiplizität des Punktes p, S. 18
$T_{min/max}$	minimale bzw. maximale abgeschlossene Fortsetzung des Operators T, S. 22
D	ideale Randbedingung der äußeren Ableitung, S. 22
$\chi_{(2)}(S)$	L^2–Eulercharakteristik von S, S. 35
$\zeta(s)$	ζ–Funktion, S. 44
$⨍_\varphi$	Mittelungsoperator bezüglich der Metrik g_φ, $$⨍_\varphi f = \frac{1}{\mathrm{vol}_\varphi S} \int f \,\mathrm{dvol}_\varphi,$$ S. 45
g_φ	von φ zur Metrik g induzierte Metrik $$g_\varphi = e^{2\varphi} g,$$ S. 48
$*_\varphi$	Hodgeoperator bezüglich der Metrik g_φ, S. 48
vol_φ, dvol_φ	Volumen und Volumenform bezüglich der Metrik g_φ, $$\mathrm{vol}_\varphi M = \int_M \mathrm{dvol}_\varphi,$$ S. 48
Δ_φ	Laplaceoperator bezüglich der Metrik g_φ, S. 48
K_φ	(Gauß–)Krümmung bezüglich der Metrik g_φ, S. 49

$\det \Delta_\varphi$	ζ–regularisierte Determinante des Laplaceoperators bezüglich der Metrik g_φ, S. 48
$C_S(g)$	Konstante $$C_S(g) = \chi(S) + \sum_{p \in \Sigma} (N(p) - 1),$$ S. 69
$\mathrm{dist}_\varphi(p, q)$	Abstand der Punkte p und q bezüglich der Metrik g_φ, S. 92
$l_\varphi(c)$	(rektifizierte) Länge der Kurve c bezüglich der Metrik g_φ, S. 92

Stichwortverzeichnis

M

N

O

P

R

S

U

W

Z